This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

RESEARCH LIBRARIES
3 06644342 9

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR.

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons, soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le courant de 1869, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier-Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR,

PAR

CHARLES BRIOT,

PROFESSEUR SUPPLÉANT A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1869

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

1119

PRÉFACE.

Ce livre est la reproduction de mon Cours à la Sorbonne pendant l'année scolaire 1867-1868. Il est divisé en deux Parties, comprenant, l'une les phénomènes thermiques proprement dits, l'autre les phénomènes électriques. La Théorie mécanique de la chaleur a pris en peu d'années une telle extension, qu'elle embrasse aujourd'hui presque toute la Physique; elle ramène à une même mesure, l'unité mécanique du travail, les manifestations si variées des forces naturelles. Mon but a été d'exposer les principes fondamentaux de cette science nouvelle, en les déduisant, autant que cela peut se faire aujourd'hui, des lois générales de la Mécanique.

J'ai beaucoup emprunté à l'ouvrage célèbre de M. Clausius, ouvrage formé de la réunion de ses Mémoires originaux sur cette matière. J'ai eu recours aussi aux travaux remarquables de MM. W. Thomson et Rankine. Dans le Chapitre relatif à l'écoulement des fluides, j'ai fait des emprunts au livre de M. Zeuner, où cette question est traitée avec détail. En ce qui concerne l'induction électrique, j'ai adopté la formule de M. Weber, qui non-seulement comprend, comme cas particuliers, la loi de Coulomb et celle d'Ampère, c'est-à-dire l'ensemble des phénomènes d'électricité statique et d'électricité dy-

namique, mais qui rend compte aussi des phénomènes d'induction. Cette loi de Weber paraît destinée à jouer un rôle prépondérant dans l'étude de l'électricité.

Je fais hommage de mon Livre, et c'est pour moi un acte de justice et une satisfaction du cœur, à la Mémoire de mon collègue Verdet, dont la mort prématurée a été une perte si grande pour la science. La Théorie mécanique de la chaleur était devenue son étude de prédilection; il l'a professée pendant deux années à la Sorbonne: j'ai été assez heureux pour assister à ses Leçons; quelques-uns de ses élèves les ont recueillies et les publient en ce moment. Le lecteur trouvera dans les Leçons de Verdet le complément des miennes; je me suis attaché surtout à la partie théorique; les Leçons de Verdet contiennent des détails précieux sur les expériences qui ont servi de base à la théorie, ou qui en confirment les conséquences, une critique sûre et approfondie de la valeur et de la portée de ces expériences, dont les plus importantes sont dues à MM. Regnault et Joule.

Je dois des remercîments à M. Mascart, qui a rédigé mes Leçons, et qui a bien voulu m'aider dans le travail de révision et de perfectionnement nécessaire à leur publication.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Préface v
Introduction 1

PRÉLIMINAIRES.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

Mouvement du centre de gravité 4
Théorème des moments des quantités de mouvement 6
Théorème des forces vives 9
Travail des forces intérieures 11
De l'énergie 14
Énergie des mouvements vibratoires 18
Influence du mouvement vibratoire sur l'énergie potentielle 22
Cas où il y a des forces extérieures 23
Travail des pressions extérieures 26

PREMIÈRE PARTIE.

THERMODYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES THERMIQUES.

Équilibre et définition de la température 31
Premier principe fondamental 33
Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur 35
Conséquences du premier principe 38
Fonction d'intégrabilité 43
Application aux gaz parfaits 45

CHAPITRE II.

THÉORÈME DE CARNOT.

Pages.

Transformations réversibles 55
Des lignes de transformation 56
Cycle de Carnot 59
Loi expérimentale de Clausius 62
Théorème de Carnot 62
Détermination de la fonction d'intégrabilité. — Température absolue 65
Équations de William Thomson 71
Équation de Rankine 74
Remarques sur le théorème de Carnot 75

CHAPITRE III.

MACHINES A FEU.

Principes généraux 78
Machines à gaz 82
Régénérateurs de chaleur 84
Machine de Stirling 88
Machine d'Ericsson 89

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DES VAPEURS.

Vapeurs saturées 91
Transformation d'un mélange de liquide et de vapeur 95
Équation de Clausius 96
Équation de W. Thomson 97
Densités des vapeurs saturées 98
Chaleur spécifique de la vapeur saturée 100
Condensation dans la détente de la vapeur d'eau 102
Énergie intérieure d'un mélange de liquide et de vapeur 105
Transformation d'un mélange de liquide et de vapeur suivant une ligne adiabatique. — Travail dans la détente 107

CHAPITRE V.

MACHINES A VAPEUR.

Pages.
Machine idéale 110
Machines réelles 112
Détente incomplète 117
Perfectionnements de la machine à vapeur. — Chemise à vapeur de Watt. 118
Emploi de la vapeur surchauffée 120
Machines à deux liquides 123

CHAPITRE VI.

ÉCOULEMENT DES LIQUIDES.

Principes généraux 126
Écoulement d'un liquide 129
Écoulement d'un gaz parfait 129
Écoulement des vapeurs 138
Injecteur Giffard 143

CHAPITRE VII.

FUSION ET SOLIDIFICATION.

Passage de l'état liquide à l'état solide 148
Transformation d'un mélange de liquide et de solide 149
Température de fusion de la glace 151

CHAPITRE VIII.

TRANSFORMATION GÉNÉRALE DES CORPS.

Coefficient de dilatation cubique; — de compressibilité cubique 155
Barre ou fil cylindrique 158
Phénomènes présentés par le caoutchouc 161

CHAPITRE IX.

THÉORIE DES GAZ.

Pages.
Hypothèse fondamentale 162
Explication de la pression 164
Loi de Mariotte. — Loi des mélanges 171
Énergie actuelle d'un gaz 174
Transformation du travail extérieur en énergie calorifique ou inversement. 177
État solide et état liquide 178
Vaporisation 179
Formation des vapeurs dans un espace illimité 180
Propagation des vibrations dans les gaz 181
Lois de combinaison des gaz 184
Loi de Dulong et Petit 184

DEUXIÈME PARTIE.

ÉLECTRICITÉ.

CHAPITRE PREMIER.

ÉLECTROSTATIQUE.

Loi de Coulomb 189
Définition du potentiel 190
Potentiel d'une couche sphérique homogène 192
Cas où le point attiré est situé à l'intérieur de la masse agissante 197
Surfaces de niveau 198
Théorème fondamental 199
Équilibre électrique dans un système de corps parfaitement conducteurs. 206
Distribution de l'électricité sur une sphère ou un ellipsoïde 210

CHAPITRE II.

SUITE DE L'ÉLECTROSTATIQUE.

Formule de Green 213
Théorèmes qui en résultent 216
Électrisation par influence 235

CHAPITRE III.

TRAVAIL DES FORCES ÉLECTRIQUES.

Pages.
Travail des forces électriques..... 241
Énergie électrique..... 242
Décharge d'une bouteille de Leyde..... 244
Décharge d'une batterie..... 246
Travail des forces magnétiques..... 249

CHAPITRE IV.

HYPOTHÈSE D'UN SEUL FLUIDE.

Hypothèse d'un seul fluide..... 251

CHAPITRE V.

THÉORIE DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

Considérations préliminaires..... 256
Loi de Ohm..... 259
Conducteurs linéaires..... 262
Travail des forces électromotrices. — Loi de Joule..... 264

CHAPITRE VI.

COURANTS THERMO-ÉLECTRIQUES.

Principe de Volta..... 270
Expérience de Seebeck..... 271
Expérience de Peltier..... 277

CHAPITRE VII.

PHÉNOMÈNES ÉLECTROCHIMIQUES.

Considérations sur la mesure des actions chimiques..... 280
Électrolytes et électrolyseurs. — Équivalents électrochimiques..... 281
Théorie de la pile..... 283

CHAPITRE VIII.

ÉLECTRODYNAMIQUE.

Pages
Préliminaires..... 287
Ramener les deux fonctions inconnues à une seule..... 291
Action d'un courant fermé sur un élément de courant..... 296
Action d'un courant élémentaire sur un élément de courant..... 299
Action d'un solénoïde sur un élément de courant..... 302
Formule d'Ampère..... 304

CHAPITRE IX.

SUITE DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

Pôles d'un solénoïde..... 307
Action d'un courant fermé sur un solénoïde..... 310
Action d'un solénoïde sur un solénoïde..... 313
Théorie du magnétisme d'Ampère..... 315
Simplification de la formule d'Ampère..... 317
Travail des forces électrodynamiques entre deux courants fermés..... 319
Travail entre un aimant et un courant fermé..... 322

CHAPITRE X.

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION.

Formule de Weber..... 325
Action mutuelle de deux courants d'intensités constantes dans des conducteurs fixes..... 326
Action mutuelle de deux courants d'intensités variables dans des conducteurs fixes..... 331
Induction d'un courant sur lui-même par le changement d'intensité..... 335
Induction entre deux courants par le changement d'intensité..... 336
Action mutuelle de deux courants dans des conducteurs mobiles..... 338
Induction d'un courant sur lui-même par le changement de forme du conducteur..... 344
Induction entre deux courants par le mouvement des conducteurs..... 346
Machines électromotrices et machines inverses..... 349

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA CHALEUR.

INTRODUCTION.

1. On attribue les phénomènes lumineux aux vibrations d'un milieu élastique qui est répandu dans l'espace et qui pénètre tous les corps. On regarde ce milieu, qu'on appelle *éther*, comme formé d'*atomes* situés à distance et exerçant les uns sur les autres des actions répulsives dirigées suivant les droites qui joignent les atomes deux à deux; ces actions sont proportionnelles aux masses des atomes et fonctions des distances qui les séparent.

2. Les corps que nous appelons *pondérables* sont aussi formés d'atomes exerçant les uns sur les autres des actions à distance. Pour expliquer les phénomènes de réfraction, il faut admettre que la densité moyenne de l'éther n'est pas la même dans les milieux réfringents que dans le vide, et, par suite, que la matière pondérable exerce une influence sur les atomes d'éther. Supposons, par exemple, que cette action soit attractive : chaque atome pondérable sera alors entouré d'une atmosphère d'éther dont la densité est plus grande que dans le vide et décroît rapidement à partir du centre; l'excès d'éther accumulé autour de chaque atome est la masse de cette atmosphère. D'après cela, l'action totale qui s'exerce entre deux atomes pondérables de masses m et m' peut être considérée comme la résultante de deux forces : l'une attractive, provc-

nant des masses pondérables elles-mêmes et de la forme $\frac{mm'a}{r^n}$, r étant la distance de ces deux atomes; l'autre répulsive, provenant de la réaction naturelle des deux atmosphères d'éther et de la forme $\frac{mm'b}{r^{n+p}}$; de sorte que l'action résultante est

$$\varphi = \frac{mm'a}{r^n} - \frac{mm'b}{r^{n+p}} = \frac{mm'a}{r^n}\left(1 - \frac{b}{ar^p}\right)$$

ou, en posant $r_0^p = \frac{b}{a}$,

$$\varphi = \frac{mm'a}{r^n}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^p\right].$$

On voit qu'il y a une position d'équilibre pour la distance $r = r_0$, que la force est attractive si la distance est plus grande que r_0, répulsive si la distance est plus petite.

3. Concevons maintenant qu'un certain nombre d'atomes constituent un groupe régulier sous l'influence de leurs actions mutuelles; ce groupe sera une *molécule*. L'action d'une molécule A ainsi formée sur une molécule B n'a pas, en général, de résultante unique; elle se ramène à une force appliquée au centre de gravité de la molécule B et à un couple; le couple fait tourner la molécule B et l'oriente d'une certaine façon par rapport à la molécule A; la force est attractive ou répulsive et il y a une position d'équilibre. On peut expliquer de cette manière la *cristallisation*.

4. En résumé, on se représente les corps comme formés d'atomes que l'on assimile à des points matériels agissant les uns sur les autres. L'action qui s'exerce entre deux points consiste en deux forces égales et de signes contraires, l'une appliquée au premier point, l'autre appliquée au second point. Cette double force est proportionnelle au produit des masses des points matériels et fonction de la distance qui les sépare; c'est une attraction ou une répulsion suivant qu'elle tend à rapprocher ou à écarter les points matériels; elle tend à les

ramener vers leur position d'équilibre, quand ils en ont été écartés par une cause étrangère.

5. Il résulte de ces déplacements un mouvement vibratoire intérieur qui peut affecter plusieurs formes différentes: ou bien l'éther seul est en vibration; ou bien les atomes matériels oscillent dans la molécule dont ils font partie, en entraînant les atmosphères d'éther qui les environnent; ou bien encore les molécules elles-mêmes se déplacent en bloc les unes par rapport aux autres. C'est l'ensemble de tous ces mouvements vibratoires que l'on suppose constituer la *chaleur*. Les vibrations calorifiques produisent un changement dans la constitution des corps et peuvent se transformer en une action extérieure; réciproquement, une action extérieure peut faire naître dans un corps des vibrations moléculaires et engendrer des phénomènes calorifiques. La *thermodynamique* est l'étude des relations qui existent entre les phénomènes calorifiques, leurs causes et leurs effets. La chaleur, considérée ainsi comme un mouvement vibratoire, rentre dans les lois générales de la mécanique, et la thermodynamique a pour bases les principes de la mécanique rationnelle.

PRÉLIMINAIRES.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

Mouvement du centre de gravité. — Théorème des moments des quantités de mouvement. — Théorème des forces vives. — Travail des forces intérieures. — Énergie actuelle et énergie potentielle. — Évaluation de l'énergie actuelle. — Influence du mouvement vibratoire sur l'énergie potentielle. — Cas où il y a des forces extérieures. — Travail des pressions extérieures.

---

6. Considérons un système de points matériels soumis en même temps à leurs actions réciproques et à des forces extérieures. Il est clair que le mouvement de chaque point matériel est produit par l'ensemble des forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur lui. Si donc on appelle m la masse d'un point matériel, x, y, z ses coordonnées par rapport à trois axes fixes rectangulaires, X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1,... les composantes des forces qui agissent sur ce point, on aura les trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + X_1 + \ldots, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + Y_1 + \ldots, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Z_1 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Chacun des points du système donne lieu à trois équations de même forme. On peut déduire de ces équations plusieurs théorèmes importants.

MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ.

7. En ajoutant membre à membre toutes les équations qui se rapportent à l'axe des x, et de même celles qui se rapportent à l'axe des y ou à l'axe des z, on a les trois équations

suivantes :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \sum m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum X,\\ \sum m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum Y,\\ \sum m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum Z,\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} D_t\sum m\frac{dx}{dt} &= \sum X,\\ D_t\sum m\frac{dy}{dt} &= \sum Y,\\ D_t\sum m\frac{dz}{dt} &= \sum Z.\end{aligned}\right.$$

Le signe $\sum$ dans le premier membre s'étend à tous les points du système, et dans le second membre à toutes les forces qui agissent sur ces différents points. Comme les forces intérieures sont deux à deux égales et opposées, leurs projections sont égales et de signes contraires, et, par conséquent, disparaissent des seconds membres des équations (3). Ces équations ne renferment donc que les forces extérieures ; elles signifient que :

Théorème I. — *La dérivée de la somme des projections sur un axe fixe quelconque des quantités de mouvement de tous les points d'un système est égale à la somme des projections des forces extérieures sur cet axe.*

8. Si les points du système ne sont soumis à aucune force extérieure, les seconds membres des équations précédentes sont nuls ; on en déduit les trois équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \sum m\frac{dx}{dt} &= A,\\ \sum m\frac{dy}{dt} &= B,\\ \sum m\frac{dz}{dt} &= C,\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles A, B, C sont des quantités constantes. Ainsi :

COROLLAIRE. — *Quand un système de points matériels n'est soumis à aucune force extérieure, la somme des projections des quantités de mouvement de tous les points du système sur un axe fixe quelconque est constante.*

9. La considération du centre de gravité du système permet d'énoncer le théorème précédent d'une autre manière. Si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité et M la masse totale, on a

$$(5)\qquad \begin{cases} Mx_1 = \sum mx, \\ My_1 = \sum my, \\ Mz_1 = \sum mz, \end{cases}$$

et les equations (2) prennent la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \sum X, \\ M\dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \sum Y, \\ M\dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \sum Z. \end{cases}$$

THÉORÈME II. — *Le mouvement du centre de gravité d'un système est le même que si toute la masse y était concentrée et toutes les forces extérieures transportées parallèlement à elles-mêmes;*

COROLLAIRE. — *Quand un système n'est soumis à aucune force extérieure, le centre de gravité reste en repos, ou se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme.*

THÉORÈME DES MOMENTS DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT.

10. Si l'on multiplie la première des équations (1) par y, la seconde par x et que l'on retranche la première de la seconde,

membre à membre, on a

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=x(\mathrm{Y}+\mathrm{Y}_1+\ldots)-y(\mathrm{X}+\mathrm{X}_1+\ldots).$$

En ajoutant toutes les équations de même sorte qui se rapportent aux différents points du système, on obtient l'équation

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}).$$

En combinant de même la deuxième des équations (1) avec la troisième, et la troisième avec la première, on a les trois équations

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}),\\&\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\sum(y\mathrm{Z}-z\mathrm{Y}),\\&\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\sum(z\mathrm{X}-x\mathrm{Z}),\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{D}_t\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\sum(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}),\\&\mathrm{D}_t\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\sum(y\mathrm{Z}-z\mathrm{Y}),\\&\mathrm{D}_t\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\sum(z\mathrm{X}-x\mathrm{Z}).\end{aligned}\right.$$

L'expression $x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}$ est le moment d'une force F par rapport à l'axe des z. Comme les forces intérieures sont deux à deux égales et opposées, leurs moments par rapport à un axe quelconque sont égaux et de signes contraires; les forces intérieures disparaissent donc des seconds membres. De même l'expression $m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$ représente le moment, par rapport à l'axe des z, de la quantité de mouvement du point matériel m. Ainsi :

THÉORÈME III. — *La dérivée de la somme des moments, par rapport à un axe fixe quelconque, des quantités de mouve-*

ment des différents points d'un système est égale à la somme des moments des forces extérieures, par rapport au même axe.

11. Si le système n'est soumis à aucune force extérieure, les seconds membres des équations qui précèdent sont nuls; on en déduit

$$(9)\qquad \begin{cases} \sum m\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)=C', \\ \sum m\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)=A', \\ \sum m\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right)=B', \end{cases}$$

A', B', C' étant des quantités constantes. Ainsi :

Corollaire. — *Quand un système n'est soumis à aucune force extérieure, la somme des moments des quantités de mouvement, par rapport à un axe fixe quelconque, est constante.*

12. Ce théorème peut être appliqué à un axe mobile de direction constante et passant par le centre de gravité. Appelons, comme précédemment, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, et ξ, η, ζ les coordonnées d'un point matériel quelconque par rapport à des axes menés par le centre de gravité parallèlement aux axes fixes, on a $x=x_1+\xi$, $y=y_1+\eta$, $z=z_1+\zeta$; remplaçant dans la première des équations (7), et remarquant que $\sum m\xi=0$, $\sum m\eta=0$, $\sum m\zeta=0$, on a

$$M\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)+\sum m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)$$
$$=x_1\sum Y-y_1\sum X+\sum(\xi Y-\eta X).$$

En vertu des équations (6), cette équation se simplifie et devient

$$\sum m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)=\sum(\xi Y-\eta X);$$

elle a même forme que les équations (7).

THÉORÈME DES FORCES VIVES.

13. On appelle en général *force vive* d'un point matériel le produit de la masse de ce point par le carré de sa vitesse. Comme ce n'est pas cette quantité elle-même que l'on a à considérer en mécanique, mais sa moitié, nous conviendrons d'appeler *force vive* d'un point matériel la moitié du produit de la masse par le carré de la vitesse. On sait que la variation de la force vive d'un point matériel pendant un temps quelconque est égale à la somme des travaux des forces qui agissent sur ce point pendant le même temps. Si l'on fait la somme de toutes les équations semblables qui se rapportent aux différents points du système, on obtient l'équation

$$\Delta \sum \frac{mv^2}{2} = \sum \mathfrak{T}F, \tag{10}$$

$\mathfrak{T}F$ désignant le travail de la force F. Ainsi :

THÉORÈME IV. — *La variation de la somme des forces vives de tous les points d'un système pendant un temps quelconque est égale à la somme des travaux de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur les différents points du système pendant le même temps.*

Appliquons ce théorème à un déplacement infiniment petit. Soient ds le déplacement du point m, dx, dy, dz ses projections sur les axes des coordonnées; le travail d'une force F appliquée à ce point étant égal à la force des travaux de ses composantes, on a

$$\text{trav. élém. de } F = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

et, par suite,

$$d\sum \frac{mv^2}{2} = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{11}$$

14. Il existe une relation très-simple entre la force vive du mouvement d'un système par rapport à des axes fixes et celle de son mouvement par rapport à son centre de gravité.

Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité et posons, comme au n° 12, $x = x_1 + \xi$, $y = y_1 + \eta$, $z = z_1 + \zeta$, on a

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ \sum m\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Si l'on appelle v la vitesse du centre de gravité, u celle d'un point quelconque par rapport au centre de gravité, et si l'on remarque que les dernières sommes sont nulles, l'équation précédente se réduit à

$$(12) \qquad \sum \frac{mv^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \sum \frac{mu^2}{2}.$$

Ainsi :

Théorème V. — *La force vive totale d'un système est égale à la force vive de la masse entière supposée concentrée au centre de gravité, plus la force vive de ce système dans son mouvement relatif au centre de gravité.*

15. Ceci va nous permettre d'étendre le théorème des forces vives au mouvement relatif au centre de gravité. L'équation (11) devient en effet

$$d\frac{Mv^2}{2} + d\sum\frac{mu^2}{2} = \left(dx_1\sum X + dy_1\sum Y + dz_1\sum Z\right)$$
$$+ \sum(X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta).$$

Mais nous avons démontré (n° 9) que le mouvement du centre de gravité est le même que si toute la masse y était concentrée et toutes les forces transportées parallèlement à elles-mêmes. En appliquant à ce point de masse M le principe des forces vives, on a

$$d\frac{Mv^2}{2} = dx_1\sum X + dy_1\sum Y + dz_1\sum Z,$$

et l'équation précédente se réduit à

$$(13) \qquad d\sum\frac{mu^2}{2}=\sum(\mathrm{X}d\xi+\mathrm{Y}d\eta+\mathrm{Z}d\zeta).$$

Ainsi le théorème des forces vives subsiste quand on considère le mouvement du système par rapport à son centre de gravité :

THÉORÈME VI. — *Si l'on évalue la force vive de chaque point et le travail de chaque force dans le mouvement relatif au centre de gravité, la variation de la somme des forces vives de tous les points du système est égale à la somme des travaux de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur ces différents points.*

TRAVAIL DES FORCES INTÉRIEURES.

16. Dans l'application du théorème des forces vives, il est bon de distinguer les forces intérieures des forces extérieures. L'action mutuelle de deux molécules m et m', dont la distance est r, se compose de deux forces égales et opposées $mm'\varphi(r)$, appliquées, l'une au premier point, l'autre au second, et dirigées suivant la droite qui les joint. La fonction $\varphi(r)$ est positive ou négative suivant que la force est attractive ou répulsive. Soient x, y, z les coordonnées du point m par rapport aux axes fixes, x', y', z' celles du point m' : les composantes de la force appliquée en m sont

$$\mathrm{X}=mm'\varphi(r)\frac{x'-x}{r},$$

$$\mathrm{Y}=mm'\varphi(r)\frac{y'-y}{r},$$

$$\mathrm{Z}=mm'\varphi(r)\frac{z'-z}{r},$$

et le travail élémentaire de cette force dans le mouvement absolu a pour expression

$$\begin{aligned}&\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz\\&\quad=mm'\frac{\varphi(r)}{r}[(x'-x)dx+(y'-y)dy+(z'-z)dz)].\end{aligned}$$

De même le travail élémentaire de la force appliquée au point m' est

$$-(\mathrm{X}dx' + \mathrm{Y}dy' + \mathrm{Z}dz')$$
$$= -\frac{mm'\varphi(r)}{r}[(x'-x)\,dx' + (y'-y)\,dy' + (z'-z)\,dz'].$$

En ajoutant, on a le travail élémentaire de l'action mutuelle des deux molécules :

$$-\frac{mm'\varphi(r)}{r}[(x'-x)(dx'-dx)$$
$$+(y'-y)(dy'-dy)+(z'-z)(dz'-dz)].$$

Or l'équation

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$

donne

$$rdr = (x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) + (z'-z)(dz'-dz).$$

L'expression du travail devient ainsi

$$-mm'\varphi(r)\,dr = mm'\,d\psi(r),$$

en posant $-\varphi(r) = \psi'(r)$.

La somme des travaux élémentaires des forces intérieures sera donc

$$\sum mm'\,d\psi(r) = d\sum mm'\psi(r).$$

Il y a dans le second membre autant de termes que de combinaisons de points matériels deux à deux.

Cette expression ne renfermant que les distances mutuelles des points du système, il est clair que le travail des forces intérieures est le même dans le mouvement relatif que dans le mouvement absolu.

17. La distance r de deux points s'exprimant par les différences des coordonnées des deux points, la quantité $\sum mm'\psi(r)$ est une fonction des coordonnées de tous les points du système, fonction que nous désignerons par $f(x, y, z, x', y', z', \ldots)$, et qui ne dépend que des positions relatives des points les

uns par rapport aux autres. La somme des travaux élémentaires des forces intérieures est la différentielle totale $df(x, y, z, x', y', z', \ldots)$ de cette fonction. Concevons maintenant que le système passe de l'état caractérisé par l'indice 1 à l'état caractérisé par l'indice 2, on aura, pour cette transformation finie,

$$\sum \mathfrak{T}\mathrm{F\,int.} = f(x_2, y_2, z_2, x'_2, \ldots) - f(x_1, y_1, z_1, x'_1, \ldots),$$

ou plus simplement

$$(14) \qquad \sum \mathfrak{T}\mathrm{F\,int.} = f_2 - f_1.$$

Supposons que le système ne soit soumis à aucune force extérieure, l'équation (10) des forces vives se réduit à

$$\Delta \sum \frac{mv^2}{2} = f_2 - f_1,$$

ou

$$\sum \frac{mv_2^2}{2} - \sum \frac{mv_1^2}{2} = f_2 - f_1.$$

Nous remplacerons la fonction f par une fonction

$$\Pi(x, y, z, x', \ldots)$$

égale et de signe contraire, afin que l'équation précédente prenne la forme

$$\sum \frac{mv_2^2}{2} - \sum \frac{mv_1^2}{2} = \Pi_1 - \Pi_2,$$

ou

$$\sum \frac{mv_2^2}{2} + \Pi_2 = \sum \frac{mv_1^2}{2} + \Pi_1.$$

La quantité $\sum \frac{mv^2}{2} + \Pi$, ayant la même valeur dans deux états quelconques du système, conserve une valeur constante pendant toute la durée du mouvement, et l'on a

$$(15) \qquad \sum \frac{mv^2}{2} + \Pi = \mathrm{C}.$$

Ainsi :

THÉORÈME VII. — *Lorsqu'un système n'est soumis à aucune action extérieure, sa force vive totale, augmentée de la fonction* Π, *reste constante.*

18. Cette équation subsiste dans le mouvement relatif au centre de gravité. On a (n° 14)

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \sum \frac{mu^2}{2};$$

mais on sait que, lorsque aucune force extérieure n'agit sur le système, le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme (n° 9), la première partie $\frac{Mv^2}{2}$ de la force vive totale est donc constante. D'autre part, nous avons déjà remarqué que la fonction $\Pi = -\sum mm'\psi(r)$ est la même dans le mouvement relatif et dans le mouvement absolu, c'est-à-dire que $\Pi(x, y, z, \ldots) = \Pi(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$. Si l'on retranche la quantité constante $\frac{Mv^2}{2}$, l'équation (15) devient

$$(16) \qquad \sum \frac{mu^2}{2} + \Pi = C'.$$

Ainsi :

THÉORÈME VIII. — *Lorsqu'un système n'est soumis à aucune action extérieure, sa force vive intérieure, augmentée de la fonction* Π, *reste constante.*

DE L'ÉNERGIE.

19. Cherchons à préciser le sens de la fonction Π. Nous avons posé

$$-\varphi(r) = \psi'(r), \quad \sum mm'\psi(r) = f \quad \text{et} \quad \Pi = -f.$$

La fonction ψ, et par conséquent les fonctions f et Π, qui en dépendent, renferment une constante arbitraire. On démontre en mécanique que lorsque, pour un certain état du système,

la valeur de la fonction f, que l'on appelle *fonction des forces*, est un maximum, cet état est un état d'équilibre stable. Si la fonction f présente plusieurs maxima, nous considérerons le plus grand d'entre eux. Or on peut concevoir que l'on ait déterminé la constante de manière que ce plus grand des maxima de la fonction f soit précisément égal à zéro. De cette manière, la fonction f conservera une valeur négative, et par conséquent la fonction Π, qui lui est égale et de signe contraire, restera toujours positive.

Imaginons que le corps parte de la position d'équilibre stable qui correspond au plus grand des maxima et vienne à sa position actuelle, le travail des forces intérieures pendant cette transformation est $f(x, y, z, \ldots) - 0$. Cette quantité négative représente le travail qu'il faut dépenser pour tirer le corps de la position idéale d'équilibre stable et l'amener à sa position actuelle. Inversement, si on laisse le corps revenir à sa position d'équilibre stable, les forces intérieures produiront un travail positif égal et contraire

$$0 - f(x, y, z, \ldots) = \Pi(x, y, z, \ldots).$$

La fonction Π représente donc le travail positif que les forces moléculaires seraient capables d'effectuer si le corps quittait la position actuelle et revenait à la position idéale d'équilibre stable.

20. Le premier membre de l'équation (15) se compose ainsi de deux parties essentiellement positives dont la somme est constante; ces deux parties peuvent se transformer l'une dans l'autre; quand l'une d'elles diminue, l'autre augmente d'une quantité égale. La première est la somme des forces vives de tous les points du système, la seconde est le travail *potentiel* des forces moléculaires, ou le travail maximum qu'elles peuvent produire. Il est utile de donner à ces deux grandeurs des noms qui rappellent leurs analogies mécaniques.

Nous adopterons les dénominations proposées par M. Rankine; nous appellerons *énergie actuelle* d'un système la somme des forces vives de tous les points du système, et *énergie po-*

tentielle le travail maximum que peuvent produire les forces intérieures. La somme de ces deux quantités est l'*énergie totale* du système. Nous désignerons l'énergie actuelle par V, l'énergie potentielle par W, et l'énergie totale par U, de manière que $U = V + W$.

Nous avons vu (n° 14) que l'énergie actuelle d'un système $V = \sum \frac{mv^2}{2}$ se compose de deux parties, l'une $\frac{Mv^2}{2}$, que nous appellerons l'*énergie du mouvement de translation*, l'autre $\sum \frac{mu^2}{2}$, qui est l'*énergie actuelle intérieure* du système, et que nous représenterons par V_i. De même la somme

$$U_i = V_i + W$$

de l'énergie actuelle intérieure et de l'énergie potentielle sera l'énergie totale intérieure, ou simplement l'*énergie intérieure* du système.

Grâce à ces dénominations, les théorèmes VII et VIII peuvent être énoncés d'une manière très-simple :

THÉORÈME IX. — *Lorsqu'un système n'est soumis à aucune force extérieure, son énergie intérieure, et aussi son énergie totale, restent constantes.*

En résumant ce qui précède, on voit que lorsqu'un système n'est soumis à aucune action extérieure, trois quantités principales restent constantes :

1° La somme des projections des quantités de mouvement sur un axe fixe quelconque, et par conséquent l'énergie du mouvement de translation;

2° La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe fixe quelconque;

3° L'énergie intérieure du système.

21. Un exemple fera bien comprendre ce qu'on entend par *énergie potentielle.*

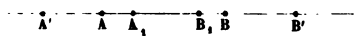
Considérons un système formé de deux molécules de masses m et m', soumises seulement à leur action mutuelle, que nous

supposerons de la forme (n° 2)

$$\frac{mm'a}{r^n}\left[1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^p\right].$$

Il y a équilibre quand les deux molécules sont à la distance r_0, et cette position d'équilibre est stable. Soient A et B (*fig.* 1) les positions des molécules en équilibre. Supposons qu'on les amène en A′ et B′, à une distance r plus grande que r_0,

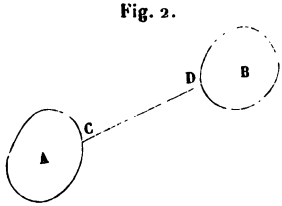
Fig. 1.



il y a attraction; si on laisse les molécules revenir à leur position d'équilibre, les forces produisent un travail positif d'autant plus grand que les molécules ont été plus écartées de leur position d'équilibre. De même, si l'on amène les molécules en A_1 et B_1, à une distance r moindre que r_0, il y a répulsion; quand on laisse les molécules revenir à la position d'équilibre, les forces produisent encore un travail positif. Ce travail positif est l'énergie potentielle du système des deux molécules dans l'état A′, B′ ou A_1, B_1.

22. Il est aisé de comprendre que l'énergie totale d'un corps mesure en quelque sorte sa puissance mécanique. Considérons, par exemple, deux corps A et B (*fig.* 2), unis par un fil

Fig. 2.



inextensible et sans masse CD. Supposons qu'il n'y ait pas de forces extérieures, l'énergie totale du système formé par ces deux corps restera constante. L'énergie du fil est nulle. En effet, sa masse étant nulle, son énergie actuelle est nulle; d'autre part, comme il est inextensible, les deux tensions donnent des travaux égaux et de signes contraires, et, par

suite, l'énergie potentielle du fil est aussi nulle. On a donc simplement, pour ce système, en appelant U l'énergie du corps A, et U′ celle du corps B, l'équation

$$U + U' = \text{const.}$$

Les deux parties de cette somme peuvent se transformer l'une dans l'autre par l'intermédiaire du fil. Lorsque U diminue, U′ augmente d'une quantité égale; c'est là ce qui caractérise l'action mécanique du corps A sur le corps B. Supposons que U diminue jusqu'à devenir nul, et, à ce moment, supprimons la communication des deux corps en coupant le fil; alors l'énergie du corps A est nulle, et la nouvelle énergie U″ du corps B est égale, d'après le théorème général, à la somme des deux précédentes. On a donc

$$U'' = U + U'.$$

A partir de ce moment, l'énergie du corps A reste constamment nulle; ce corps est arrivé à un état d'équilibre stable au repos qui persistera tant que des forces extérieures n'interviendront pas. L'énergie totale U mesure donc l'action mécanique maximum qu'un corps peut exercer sur les corps extérieurs.

ÉNERGIE DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES.

23. Nous avons vu déjà (n° 14) que l'énergie actuelle d'un système se compose de l'énergie du mouvement de translation du centre de gravité et de l'énergie actuelle intérieure, c'est-à-dire de l'énergie actuelle du mouvement relatif à des axes passant par le centre de gravité. Mais il y a lieu de distinguer encore dans cette dernière énergie ce qui se rapporte au mouvement sensible et ce qui se rapporte au mouvement vibratoire, qui est en général très-rapide et impossible à observer directement.

Considérons d'abord un système de points matériels sans mouvement sensible et animés seulement d'un mouvement vibratoire. Chaque point matériel oscille autour d'une position moyenne. Nous représenterons par x, y, z les coordonnées de

cette position moyenne, et par $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ celles du point matériel en mouvement. Puisqu'il n'y a pas de mouvement sensible, les coordonnées x, y, z sont indépendantes du temps, et l'on a

$$v^2=\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2.$$

On peut regarder un mouvement vibratoire quelconque comme la superposition de vibrations simples de la forme

$$\xi=\mathrm{A}\cos\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}+\alpha\right),$$

$$\eta=\mathrm{B}\cos\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}+\beta\right),$$

$$\zeta=\mathrm{C}\cos\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}+\gamma\right).$$

Pour une vibration simple, on a

$$v^2=\frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2}\left[\mathrm{A}^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}+\alpha\right)\right.$$
$$\left.+\mathrm{B}^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}+\beta\right)+\mathrm{C}^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}+\gamma\right)\right],$$

ou

$$v^2=\frac{2\pi^2}{\mathrm{T}^2}\left[\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2-\mathrm{A}^2\cos\left(\frac{4\pi t}{\mathrm{T}}+2\alpha\right)-\ldots\right].$$

La force vive varie pendant la durée d'une vibration. Sa valeur moyenne est donnée par l'intégrale définie

$$(17)\qquad \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\frac{mv^2}{2}dt=m\pi^2\frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}{\mathrm{T}^2}.$$

Dans un mouvement vibratoire complexe, le carré de la vitesse a pour expression

$$v^2=4\pi^2\left\{\left[\sum\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{T}}\sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}+\alpha\right)\right]^2\right.$$
$$\left.+\left[\sum\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{T}}\sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}+\beta\right)\right]^2+\left[\sum\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{T}}\sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}+\gamma\right)\right]^2\right\}.$$

$\sum \frac{A}{T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)$ est une somme de termes de la forme

$$\frac{A}{T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) + \frac{A'}{T'} \sin\left(\frac{2\pi t}{T'} + \alpha'\right) + \ldots;$$

son carré est

$$\sum \frac{A^2}{T^2} \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)$$
$$+ \sum \frac{2AA'}{TT'} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T'} + \alpha'\right).$$

En transformant les termes de la première somme, comme précédemment, et prenant la moyenne pendant un temps très-grand par rapport à chaque période, afin de pouvoir négliger les termes périodiques, on obtient

$$\frac{1}{2} \sum \frac{A^2}{T^2}.$$

Les termes de la deuxième somme peuvent être transformés de la manière suivante :

$$\frac{2AA'}{TT'} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T'} + \alpha'\right)$$
$$= \frac{AA'}{TT'} \left\{ \cos\left[2\pi t\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'}\right) + \alpha - \alpha'\right] \right.$$
$$\left. - \cos\left[2\pi t\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right) + \alpha + \alpha'\right] \right\}.$$

L'intégrale du second membre est une somme de sinus, et la valeur moyenne de cette intégrale pour un intervalle de temps θ, très-grand par rapport à la durée de chaque période, est négligeable.

On trouve ainsi, pour la valeur moyenne de l'énergie actuelle du point m,

$$(18) \qquad \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{mv^2}{2} dt = m\pi^2 \sum \frac{A^2 + B^2 + C^2}{T^2}.$$

On conclut de là que : *L'énergie moyenne d'un mouvement vibratoire quelconque est égale à la somme des énergies moyennes des mouvements vibratoires simples qui le composent.*

24. Supposons maintenant que le corps soit animé en même temps d'un mouvement sensible et d'un mouvement vibratoire. Les coordonnées d'un point m à un instant quelconque sont encore $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$; mais les coordonnées x, y, z de la position moyenne sont ici des fonctions du temps. Les composantes de la vitesse de ce point sont

$$\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}.$$

Pour le point considéré, la composante $\frac{dx}{dt}$ de la vitesse sensible peut être regardée comme constante pendant la durée d'une période T, si le mouvement vibratoire est simple, ou, plus généralement, pendant un intervalle de temps θ, petit en valeur absolue, mais très-grand par rapport à chacune des périodes qui entrent dans un mouvement vibratoire complexe. On peut donc écrire

$$\frac{1}{\theta}\int_0^\theta m\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}\,dt=\frac{1}{\theta}m\frac{dx}{dt}\int_0^\theta\frac{d\xi}{dt}\,dt=\frac{1}{\theta}m\frac{dx}{dt}[\xi]_0^\theta=0.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}\frac{1}{\theta}\int_0^\theta\frac{mv^2}{2}\,dt=&\frac{m}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)\\&+\frac{1}{\theta}\int_0^\theta\frac{m}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)\\&+\frac{1}{\theta}\int_0^\theta m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right)dt.\end{aligned}$$

Les trois termes de la dernière intégrale sont négligeables,

comme nous venons de le voir, il reste donc

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \frac{mv^2}{2}\,dt = \frac{m}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right) \\ + \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \frac{m}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right). \end{aligned}\right.$$

La première partie du second membre est la force vive du mouvement sensible, la seconde est la force vive moyenne du mouvement vibratoire. On dira donc que :

L'énergie actuelle d'un corps est la somme de l'énergie du mouvement sensible et de l'énergie du mouvement vibratoire.

INFLUENCE DU MOUVEMENT VIBRATOIRE SUR L'ÉNERGIE POTENTIELLE.

25. Considérons un corps sans mouvement sensible et animé d'un mouvement vibratoire. L'énergie potentielle, qui est une fonction des distances des différents points, dépend du mouvement vibratoire et varie aussi d'une manière périodique; nous pouvons nous proposer de calculer sa valeur moyenne. Représentons toujours par x, y, z les coordonnées de la position moyenne du point m; s'il n'y avait pas de mouvement vibratoire, l'énergie potentielle aurait pour valeur

$$W = F(x, y, z, x', y', z' \ldots).$$

Pendant la vibration, les coordonnées du point m sont $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$; alors l'énergie potentielle a pour valeur

$$W = F(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, x'+\xi', \ldots).$$

Les coordonnées ξ, η, ζ du déplacement vibratoire sont très-petites par rapport à x, y, z; on peut donc développer cette fonction en série rapidement décroissante et écrire, en se bornant aux termes du second degré,

$$\begin{aligned} W = F(x, y, z, x', y', z', \ldots) + \frac{dF}{dx}\xi + \frac{dF}{dy}\eta + \frac{dF}{dz}\zeta \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\xi^2 + \frac{d^2F}{dy^2}\eta^2 + \frac{d^2F}{dz^2}\zeta^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}\xi\eta + \ldots\right). \end{aligned}$$

Les termes du premier degré n'ont pas d'influence sensible dans la moyenne. Mais les termes du second en ont une, et l'on trouve que la valeur moyenne de l'énergie potentielle a pour expression

$$F(x, y, z, \ldots) + \frac{1}{4}\left[\frac{d^2F}{dx^2}A^2 + \frac{d^2F}{dy^2}B^2 + \frac{d^2F}{dz^2}C^2 + 2\frac{d^2F}{dxdy}AB\cos(\alpha-\beta) + \ldots\right].$$

On conclut de là que : *La vibration change la valeur moyenne de l'énergie potentielle, sans que les positions moyennes des molécules soient changées,* c'est-à-dire *sans que l'état apparent du corps soit changé.*

CAS OU IL Y A DES FORCES EXTÉRIEURES.

26. Nous avons trouvé l'équation des forces vives dans le cas le plus général (n° 13) :

$$(20) \qquad \Delta\sum\frac{mv^2}{2} = \sum \mathfrak{E}\,F\,\text{int.} + \sum \mathfrak{E}F\,\text{ext.}$$

Si le corps a passé de l'état [1] à l'état [2], on a (n° 17)

$$\sum \mathfrak{E}\,F\,\text{int.} = f_2 - f_1 = \Pi_1 - \Pi_2;$$

l'équation (20) devient ainsi

$$\Delta\sum\frac{mv^2}{2} + (\Pi_2 - \Pi_1) = \sum \mathfrak{E}\,F\,\text{ext.},$$

ou bien

$$\Delta V + \Delta W = \sum \mathfrak{E}\,F\,\text{ext.},$$

$$(21) \qquad \Delta U = \sum \mathfrak{E}\,F\,\text{ext.}$$

Ainsi :

Théorème X. — *La variation de l'énergie totale d'un système est égale à la somme des travaux des forces extérieures.*

Nous avons vu que le théorème des forces vives subsiste

dans le mouvement relatif au centre de gravité (n° 15); on a donc

$$\Delta \sum \frac{mu^2}{2} = \sum \mathfrak{T}' \text{F int.} + \sum \mathfrak{T}' \text{F ext.},$$

$\mathfrak{T}'$ désignant le travail dans le mouvement relatif. Le travail des forces intérieures étant le même dans le mouvement relatif que dans le mouvement absolu, cette équation peut être mise sous la forme

$$\Delta V_i + \Delta W = \sum \mathfrak{T}' \text{F ext.},$$

ou

$$\Delta U_i = \sum \mathfrak{T}' \text{F ext.} \tag{22}$$

Ainsi :

Théorème XI. — *La variation de l'énergie intérieure d'un système est égale à la somme des travaux des forces extérieures dans le mouvement relatif au centre de gravité.*

27. Outre l'action des forces extérieures proprement dites, le corps peut recevoir une certaine quantité d'énergie calorifique qui lui vient du dehors, ou bien il peut perdre une certaine quantité d'énergie calorifique qu'il communique aux corps extérieurs. Cet échange d'énergie calorifique a lieu par rayonnement ou par conductibilité, et voici comment on conçoit qu'il s'effectue :

Quand un corps est animé d'un mouvement vibratoire moléculaire, l'éther que possède le corps participe au mouvement; ce mouvement se communique à l'éther ambiant, dans lequel il se propage par ondes successives, et l'éther ne conserve rien du mouvement vibratoire qu'il a servi à transmettre ; c'est là ce qui constitue le *rayonnement* de la chaleur.

Inversement, quand une onde calorifique rencontre un corps, elle communique une partie de son énergie à l'éther que renferme le corps et aux molécules elles-mêmes; le corps entre alors en vibration, ou bien le mouvement vibratoire qu'il possédait est modifié; le corps a absorbé une certaine quantité d'énergie calorifique.

Enfin, quand une molécule d'un corps est en vibration, elle

communique cette vibration aux molécules voisines, et le mouvement se propage ainsi de proche en proche : il y a alors communication d'énergie calorifique par *conductibilité*. Il est probable que l'éther intervient encore dans ce dernier cas, mais le phénomène est plus complexe.

28. Supposons donc qu'une certaine quantité d'énergie calorifique Z, venant du dehors, pénètre dans le corps; elle augmentera d'autant l'énergie totale du corps, et l'équation (21) deviendra

$$\Delta U = \sum \mathfrak{S} F \text{ext.} + Z. \tag{23}$$

Supposons, au contraire, que le corps dégage une certaine quantité d'énergie calorifique Z', il est clair que le travail des forces extérieures est égal à la variation d'énergie totale du corps, plus la quantité Z' d'énergie calorifique dégagée; l'équation (21) devient ainsi

$$\sum \mathfrak{S} F \text{ext.} = \Delta U + Z'.$$

Mais cette dernière équation rentre dans la précédente; il suffit de regarder une quantité d'énergie calorifique absorbée comme positive, dégagée comme négative. On a donc le théorème général suivant :

THÉORÈME XII. — *Dans tout système, la variation de l'énergie totale est égale à la somme des travaux des forces extérieures, plus ou moins l'énergie calorifique absorbée ou dégagée.*

On peut répéter les mêmes raisonnements en considérant, non plus le mouvement absolu, mais le mouvement relatif au centre de gravité. Si une quantité d'énergie calorifique Z est absorbée ou dégagée par le corps, elle augmentera ou diminuera d'autant son énergie intérieure, et l'équation (22) deviendra

$$\Delta U_i = \sum \mathfrak{S}' F \text{ext.} + Z : \tag{24}$$

Théorème XIII. — *Dans tout système, la variation de l'énergie intérieure est égale à la somme des travaux des forces extérieures, estimés dans le mouvement relatif au centre de gravité, plus ou moins l'énergie calorifique absorbée ou dégagée.*

TRAVAIL DES PRESSIONS EXTÉRIEURES.

29. Ordinairement les forces extérieures consistent en pressions normales s'exerçant sur la surface du corps. Le corps A reçoit d'un autre corps B une pression P et réagit sur lui avec une force égale et contraire — P; il est clair que la somme des travaux des pressions extérieures que supporte le corps A est égale et de signe contraire à la somme des travaux des réactions du corps A sur les corps extérieurs. Si donc on appelle S la somme des travaux des réactions du corps A sur les corps extérieurs, la somme des travaux des pressions extérieures s'exerçant sur le corps A sera — S; l'équation (23) devient

$$\Delta U = Z - S, \tag{25}$$

et le théorème XII s'énonce de la manière suivante :

La variation de l'énergie totale d'un corps est égale à l'énergie calorifique absorbée ou dégagée par ce corps, moins le travail extérieur accompli par le corps.

Le même théorème a lieu dans le mouvement relatif au centre de gravité. Si l'on désigne par S′ le travail extérieur accompli par le corps A, travail évalué dans ce mouvement relatif, l'équation (24) devient

$$\Delta U_i = Z - S', \tag{26}$$

et le théorème XIII s'énonce ainsi :

La variation de l'énergie intérieure d'un corps est égale à l'énergie calorifique absorbée ou dégagée par le corps, moins le travail extérieur accompli par le corps dans le mouvement relatif au centre de gravité.

Si le corps, après une série de transformations, revient à sa position et à son état primitifs, son énergie totale reprenant la

même valeur, on a $\Delta U = 0$, et l'équation (25) se réduit à

$$Z = S. \tag{27}$$

Il y a deux cas à distinguer, suivant que les quantités Z et S sont positives ou négatives. Dans le premier cas, le corps absorbe de l'énergie calorifique et accomplit un travail extérieur égal ; dans le second cas, le corps reçoit un travail extérieur et dégage une quantité égale d'énergie calorifique. Ces deux cas sont compris dans un même énoncé :

COROLLAIRE. — *Lorsque le corps revient au même état, la quantité d'énergie calorifique absorbée ou dégagée par le corps est égale au travail extérieur accompli ou reçu par le corps.*

Les machines thermiques ont pour but de transformer la chaleur en travail, ou inversement le travail en chaleur. Dans toutes ces machines, le mouvement est périodique et l'équation précédente est vraie pour un intervalle de temps égal à un nombre entier de périodes.

TRAVAIL EXTÉRIEUR DANS LE CAS D'UNE PRESSION UNIFORME.

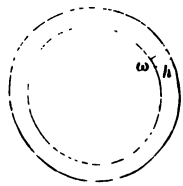
30. Enfin les pressions extérieures se réduisent le plus souvent à une pression uniforme s'exerçant sur toute la surface du corps. Dans ce cas, le travail extérieur peut être exprimé d'une manière très-simple, lorsqu'il n'y a pas de mouvement sensible.

Soit v le volume du corps A, p la pression qu'il supporte par mètre carré, un élément ω de la surface supportera la pression $p\omega$. Supposons que le corps A éprouve un changement de volume infiniment petit, et soit h la portion de normale comprise entre l'élément ω et la nouvelle surface du corps. Le travail de la réaction du corps A sur les corps extérieurs est $p\omega h$ pour l'élément de surface ω; le travail total dS, accompli par le corps, est

$$dS = \sum p\omega h = p\sum \omega h.$$

Mais ωh (*fig.* 3) est le volume compris entre l'élément ω et l'élément

Fig. 3.



correspondant de la nouvelle surface; $\sum \omega h$ est la variation de volume dv du corps. On a donc

$$dS = p\,dv. \tag{28}$$

PREMIÈRE PARTIE.

THERMODYNAMIQUE.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES THERMIQUES.

Définition de la température. — Premier principe fondamental. — Détermination de l'équivalent mécanique de la chaleur. — Conséquences du principe de l'équivalence. — Fonction d'intégrabilité. — Application aux gaz parfaits.

31. Lorsque deux corps sont mis en relation, l'un d'eux se comporte généralement comme une source de chaleur, il se refroidit pendant que le second s'échauffe. Cet échange de chaleur entre les corps peut avoir lieu de différentes manières. Si les corps sont en contact direct, ou s'ils sont séparés par des corps pondérables qui participent au mouvement calorifique, la communication de chaleur se fait par *conductibilité*. Si, au contraire, il n'y a pas de corps intermédiaires, ou si les corps pondérables intermédiaires ne participent pas au mouvement calorifique, la communication de chaleur se fait par *rayonnement*. Enfin, l'échange de chaleur peut avoir lieu en même temps par rayonnement et par conductibilité.

Dans tous les cas, si aucune cause extérieure n'intervient, les deux corps arrivent à un état qui persiste indéfiniment; on dit qu'ils sont alors en *équilibre de température* ou qu'ils ont la *même température*. C'est un état d'équilibre mobile, parce qu'on suppose qu'il y a entre eux des échanges de chaleur continuels et équivalents.

Quand l'équilibre a lieu entre deux corps, il est indépen-

dant de la disposition qu'on leur donne; on en conclut que l'équilibre de température est un état parfaitement défini, qui ne peut avoir lieu que d'une seule manière.

Si deux corps A et B sont en équilibre de température avec un troisième corps C, l'expérience indique qu'ils sont entre eux en équilibre de température.

Quand deux corps mis en relation ne sont pas en équilibre de température, celui qui envoie le plus de chaleur à l'autre est dit à une température *plus élevée*. Si un corps A est à une température plus élevée qu'un deuxième corps B, celui-ci étant en équilibre avec un troisième corps C, l'expérience indique que le corps A est aussi à une température plus élevée que le corps C. Supposons de même que le corps B soit à une température plus élevée que C et moins élevée que A, et qu'on laisse refroidir le corps A jusqu'à ce qu'il soit en équilibre avec C, on constate qu'il passe par la température du corps intermédiaire B.

En d'autres termes, on peut, en classant les corps d'après leurs réactions calorifiques, construire une échelle des températures, et cette échelle des températures est unique.

Supposons qu'on mette un même corps P successivement en équilibre de température avec tous les corps de l'échelle précédente, il passera par une série d'états successifs qui pourront servir à caractériser les différentes températures: ce sera un *thermomètre*.

32. L'objet principal de la thermodynanique est d'étudier les transformations d'un corps homogène, ayant dans toute son étendue la même densité ou le même volume spécifique v (le volume spécifique est le volume de l'unité de poids), la même température t, soumis sur toute sa surface à une pression uniforme p, et de plus sans mouvement sensible. L'état d'un corps dans ces conditions dépend, en général, de deux variables indépendantes, son énergie actuelle V, et son énergie potentielle W. Toutes les quantités que l'on considère habituellement et qui caractérisent l'état physique du corps, savoir la température t, le volume spécifique v et la pression p, dépendent

de V et W; ce sont des fonctions de ces deux quantités,

$$t = f_1(V, W), \quad v = f_2(V, W), \quad p = f_3(V, W).$$

On a ainsi trois équations entre cinq grandeurs, dont deux quelconques peuvent être prises pour variables indépendantes; on choisit ordinairement v et p; alors la température est une fonction du volume et de la pression.

Toutefois, dans certaines questions, on n'est pas maître du choix des variables, parce que les fonctions éprouveraient de grandes variations pour de petits changements des variables. Par exemple, dans la fusion de la glace sous pression constante, le volume change peu pendant la durée du phénomène, et l'état du corps éprouve cependant une modification considérable; il ne conviendrait pas de prendre v et p comme variables indépendantes. La difficulté disparaît si l'on prend pour variable indépendante l'énergie potentielle W; c'est la quantité qui éprouve alors les plus grands changements.

DÉFINITION DE LA TEMPÉRATURE.

33. Pour tout corps homogène, placé dans les conditions indiquées précédemment, il existe entre la température, le volume spécifique et la pression une relation

$$(1) \qquad \varphi(t, v, p) = 0.$$

On ne connaît pas encore la forme de cette fonction pour un corps quelconque; les lois de Gay-Lussac et de Mariotte en donnent seulement une expression très-approchée pour les gaz permanents. Mais il suffit que nous concevions l'existence de cette relation pour qu'elle nous serve à définir les températures. Considérons, en effet, un corps quelconque que l'on maintient sous pression constante; de l'équation précédente on déduit

$$t = f(v).$$

Les variations de volume d'un corps sous pression constante peuvent donc servir à graduer l'échelle des températures, pourvu que ce corps ne présente pas de circonstances

particulières, telles qu'un changement d'état, dans les limites de température entre lesquelles il sert de thermomètre.

Il y a avantage à employer un gaz permanent pour construire le thermomètre; on graduera l'échelle des températures par les variations de volume d'un poids de gaz égal à l'unité sous une pression déterminée. Soient v_0 le volume de ce poids à une température déterminée que nous appellerons *zéro*, v_1 le volume de la même masse à une autre température définie t_1, et v le volume à une température quelconque t; en supposant les températures proportionnelles aux changements de volume à partir de la température zéro, on aura

$$\frac{t}{t_1} = \frac{v - v_0}{v_1 - v_0}.$$

Si l'on pose $\alpha = \frac{v_1 - v_0}{v_0 t_1}$, cette équation prend la forme

$$v = v_0(1 + \alpha t);$$

α est ce qu'on appelle le *coefficient de dilatation du gaz.*

34. Tous les gaz et les vapeurs surchauffées tendent vers un état-limite caractérisé par les lois de Mariotte et de Gay-Lussac. Je rappelle ces deux lois :

1° Loi de Gay-Lussac. — *Tous les gaz permanents ont le même coefficient de dilatation, et ce coefficient est indépendant de la pression.*

Ce coefficient de dilatation α des gaz est d'environ $\frac{1}{273}$.

2° Loi de Mariotte. — *Les volumes d'une même masse de gaz à la même température sont en raison inverse des pressions.*

Si v est le volume d'une certaine masse de gaz sous la pression p, v' le volume de la même masse sous la pression p' et à la même température, on a

$$\frac{v}{v'} = \frac{p'}{p} \quad \text{ou} \quad vp = v'p'.$$

Ces deux lois permettent d'établir la relation qui existe

entre le volume spécifique, la température et la pression. Soient, en effet, v_0 le volume d'un poids de gaz égal à l'unité à la température zéro et sous une pression déterminée p_0, v le volume de la même masse de gaz à la température t et sous la pression p. Appelons v' le volume du gaz sous la pression p_0 et à la température t. On a, d'après la loi de Gay-Lussac, $v' = v_0(1 + \alpha t)$, et, d'après celle de Mariotte, $vp = v'p_0$. On en déduit la relation cherchée

$$(2) \qquad vp = v_0 p_0 (1 + \alpha t),$$

entre la température, le volume et la pression.

Les deux constantes p_0 et α sont les mêmes pour tous les gaz. Si l'on pose $a = \frac{1}{\alpha}$, $(a = 273)$, la relation précédente prend la forme

$$(3) \qquad vp = \alpha v_0 p_0 (a + t).$$

PREMIER PRINCIPE FONDAMENTAL.

35. On mesure les quantités de chaleur absorbées ou dégagées dans les expériences, en les comparant à une autre quantité de chaleur prise pour unité et définie par le passage d'un certain corps d'un état déterminé à un autre état déterminé. On a pris pour unité de chaleur la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer 1 kilogramme d'eau de la température de 0 degré à la température de 1 degré sous la pression de 760 millimètres; c'est ce qu'on appelle une *calorie*.

Nous avons précédemment représenté par Z une certaine quantité d'énergie calorifique; cette énergie, qui est une force vive, était exprimée au moyen de l'unité habituelle de la force vive ou du travail, c'est-à-dire au moyen du kilogrammètre. Une même quantité de chaleur peut donc être représentée par un nombre Q de calories ou par un nombre Z de kilogrammètres. Si l'on appelle E le rapport de la calorie au kilogrammètre, on aura évidemment

$$Z = EQ.$$

Ce rapport E est ce qu'on appelle l'*équivalent mécanique*

de la chaleur; c'est le nombre de kilogrammètres auquel équivaut une calorie. Nous emploierons aussi le rapport inverse $A = \frac{1}{E}$, d'où

$$Q = AZ.$$

Le premier principe fondamental de la théorie mécanique de la chaleur est exprimé par l'équation (23) que nous avons déduite du théorème des forces vives (n° 28), et que nous écrirons sous la forme la plus générale

$$(4) \qquad \Delta U = \sum \mathfrak{E} F \text{ ext.} + EQ.$$

Cette équation s'applique au mouvement absolu ou au mouvement relatif au centre de gravité.

Ordinairement, comme nous l'avons dit au n° 29, les forces extérieures consistent en pressions normales s'exerçant sur la surface du corps. Si l'on appelle S la somme des travaux des réactions du corps considéré sur les corps extérieurs, la somme des travaux des forces extérieures est $-S$, et l'équation précédente devient

$$(5) \qquad EQ = \Delta U + S,$$

ou

$$Q = A(\Delta U + S).$$

Elle montre que *la quantité de chaleur absorbée ou dégagée par un corps est équivalente à la variation de son énergie* (totale ou intérieure, suivant qu'il s'agit du mouvement absolu ou du mouvement relatif au centre de gravité), *plus le travail extérieur accompli par le corps.*

Lorsque le corps revient à son état primitif, la variation d'énergie ΔU étant nulle, l'équation précédente se réduit à

$$(6) \qquad EQ = S.$$

La quantité de chaleur absorbée ou dégagée par le corps est équivalente à la quantité de travail extérieur accomplie ou reçue par le corps.

Les progrès de la théorie datent surtout de l'époque où l'on a conçu nettement cette notion de l'équivalence entre une quantité de chaleur et une quantité de forces vives ou de travail. La connaissance de la valeur numérique du rapport E

e la calorie au kilogrammètre a une grande importance au oint de vue des applications. Un grand nombre de physiciens nt cherché à le déterminer; nous citerons quelques-uns de ;urs travaux les plus importants.

DÉTERMINATION DE L'ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR.

36. Les expériences les plus célèbres sont celles de M. Joule ır le frottement. Dans ces expériences, un travail extérieur onnu est dépensé pour faire frotter deux corps l'un contre autre et produire ainsi une certaine quantité de chaleur que on mesure à l'aide d'un calorimètre.

Un des appareils de M. Joule est entièrement construit en ıiton. Il se compose d'un vase calorimétrique rempli d'eau ans lequel tourne un axe vertical portant seize palettes ver- cales qui passent dans les intervalles ménagés entre des ı mes fixées aux parois du calorimètre, afin d'augmenter le ottement du liquide sur lui-même et sur les pièces mé- ı lliques. L'axe tournant est muni d'un cylindre extérieur sur quel s'enroulent deux cordes dont chacune passe ensuite ır une poulie mise en mouvement par la descente d'un poids.

La température du calorimètre étant bien connue, on laisse scendre les poids moteurs et on mesure l'échauffement qui résulte. Pour connaître le travail extérieur qui a été trans- rmé en chaleur, il faut retrancher du travail effectué par la santeur dans la chute des poids la force vive qu'ils possèdent la fin de l'expérience et le travail absorbé par la roideur s cordes et par le frottement des pièces non situées dans calorimètre. Pour évaluer ce travail absorbé à l'extérieur u calorimètre, on sépare le cylindre de l'arbre tournant, on roule les deux cordes en sens contraires; l'appareil est ors en équilibre, et on détermine par tâtonnements l'excès poids qu'il est nécessaire d'appliquer à l'une des poulies our donner à l'appareil un mouvement uniforme avec une tesse égale à celle de la première expérience. Cet excès poids est alors équilibré par les résistances extérieures. n peut donc calculer quel était le travail absorbé dans ces xpériences.

Quant à la chaleur créée, elle se compose de celle qui a produit l'échauffement du calorimètre et qu'il est facile de calculer par l'élévation de température et de la chaleur enlevée par le milieu extérieur; cette dernière est très-faible et on peut l'évaluer approximativement. On a ainsi toutes les données nécessaires pour déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur.

Dans le cas actuel, il y a dégagement ou création de chaleur, Q est négatif. Si l'on pose $Q = -Q'$, l'équation (4) devient

$$\mathfrak{T}\,\text{ext.} = \Delta U + EQ'.$$

Dans les expériences de M. Joule, les corps frottants sont des liquides ou des solides très-durs qui n'éprouvent pas d'usure appréciable pendant l'opération; le poids du liquide renfermé dans le calorimètre est assez grand pour que l'élévation de température soit très-faible, et enfin la présence des palettes fixes empêche le liquide d'avoir une force vive sensible à la fin de l'expérience. Il en résulte que la variation d'énergie ΔU des corps frottants est négligeable par rapport à la quantité de chaleur dégagée par le frottement et absorbée par le calorimètre. On peut donc écrire, avec une approximation suffisante,

$$\mathfrak{T}\,\text{ext.} = EQ'.$$

Le travail extérieur est évalué en kilogrammètres; la quantité de chaleur dégagée Q' est mesurée en calories; le rapport est l'équivalent cherché E.

Dans d'autres expériences, M. Joule s'est servi d'un calorimètre en fer de même forme que le précédent et renfermant du mercure. Enfin il a supprimé l'axe à palettes et l'a remplacé par un anneau conique de fonte qui frottait sur un cône de même substance, au sein d'une masse de mercure. Il a ainsi obtenu les résultats suivants :

Frottement de l'eau sur elle-même et sur le laiton...	424,[illegible]
Frottement du mercure sur lui-même et sur le fer..	425 426,[illegible]
Frottement de la fonte sur elle-même dans le mercure.	426,[illegible] 425,[illegible]

L'accord de ces résultats est extrêmement remarquable; la moyenne est environ 425. C'est la valeur généralement adoptée pour l'équivalent mécanique de la chaleur.

37. M. Hirn a suivi une marche inverse. Il a cherché à mesurer le travail accompli par la consommation d'une certaine quantité de chaleur dans une machine à vapeur à condensation. Dans ce cas, le foyer fournit à la vapeur une certaine quantité de chaleur Q_2 que l'on peut calculer d'après les expériences de M. Regnault, en connaissant la température de la vapeur à son entrée dans le cylindre. Une portion Q_1 de cette chaleur est absorbée par l'eau froide du condenseur ou se dissipe dans le milieu ambiant; la différence $Q_2 - Q_1$ de ces deux quantités de chaleur est transformée en travail. Les seules forces extérieures dont il y ait à tenir compte sont ici des pressions normales (n° 29). M. Hirn évalue le travail extérieur S accompli par la machine en déterminant, à des intervalles très-rapprochés, à l'aide d'un indicateur de Watt, la force élastique de la vapeur dans le corps de pompe. Ces deux éléments suffisent pour calculer la valeur de l'équivalent mécanique. En effet, le mouvement de la machine étant périodique, après un nombre entier de périodes, la variation d'énergie intérieure ΔU est nulle, et l'on a la relation

$$S = EQ = E(Q_2 - Q_1),$$

entre le travail extérieur et la chaleur consommée (n° 35).

Toutefois, cette méthode ne comporte pas le même degré de précision que celle de M. Joule, parce que le travail extérieur est difficile à évaluer et que la quantité de chaleur $Q_2 - Q_1$ que l'on introduit dans le calcul est très-petite par rapport à celles qu'il faut mesurer; il y a en outre un grand nombre de causes d'erreur dont on ne peut pas tenir compte exactement. Les nombres obtenus par M. Hirn varient de 300 à 600, la moyenne est 415 : ces résultats sont donc peu concordants; mais si l'on remarque que les expériences ont été faites dans des conditions très-diverses, avec des causes d'erreur variables d'une expérience à l'autre, avec des machines

de systèmes et de puissances très-différents, et si l'on songe aux difficultés de recherches semblables, on devra considérer ces expériences de M. Hirn comme une confirmation remarquable de celles de M. Joule.

CONSÉQUENCES DU PREMIER PRINCIPE.

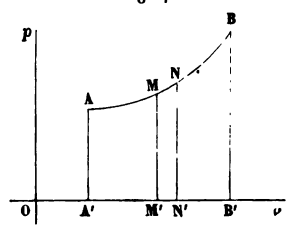
38. Considérons un corps homogène, sans mouvement sensible, et soumis sur toute sa surface à une pression uniforme; l'état du corps est caractérisé par trois grandeurs, la température t, le volume spécifique v et la pression p. Mais nous avons vu (n° 33) qu'il existe une relation

$$\varphi(t, v, p) = 0 \tag{1}$$

entre ces trois quantités; deux quelconques d'entre elles suffisent donc pour définir l'état du corps; pour le moment, nous définirons l'état du corps à l'aide des deux variables indépendantes v et p.

Une représentation géométrique aidera beaucoup à suivre les raisonnements. Traçons dans un plan deux axes rectangulaires Ov et Op (*fig.* 4) et marquons le point M du plan dont

Fig. 4.



l'abscisse OM′ est égale à v et l'ordonnée MM′ à p : la position du point M dans le plan représentera l'état du corps. Si le corps passe de l'état A à l'état B, la suite des transformations sera figurée par une ligne AMB.

L'aire plane ABB′A′ représente le travail extérieur S accompli par le corps; en effet, le corps n'ayant pas de mouvement sensible et étant soumis à une pression uniforme, nous avons vu (n° 30) que le travail extérieur qui correspond à une trans-

formation infiniment petite MN est exprimé par la formule $dS = pdv$; il est égal à l'aire du petit rectangle MNN'M'; par suite, le travail extérieur accompli par le corps en passant de l'état A à l'état B est représenté par l'aire ABB'A'. Ce travail dépend non-seulement des états extrêmes A et B, mais encore de la suite des états intermédiaires, c'est-à-dire de la manière dont la transformation a eu lieu, ou de la forme de la courbe.

Concevons que le corps parte d'un état initial déterminé A pour arriver à un état quelconque M, défini par les valeurs v et p des variables. Le travail extérieur S, dépendant de la suite des transformations, ne peut pas être considéré comme une fonction des deux variables v et p. Au contraire, il est évident que l'énergie intérieure U du corps dépend uniquement de son état actuel; c'est une fonction parfaitement déterminée de v et de p; la variation $\Delta U = U - U_0$ qu'elle éprouve en passant de l'état initial A à un état quelconque M est aussi une fonction de v et de p.

D'après l'équation fondamentale (n° 35)

$$Q = A(\Delta U + S),$$

la quantité de chaleur Q étant la somme de deux quantités, dont l'une $A\Delta U$ est indépendante de la suite des transformations et dont l'autre en dépend, en dépend également; ce n'est donc pas une fonction de v et p.

Si l'on applique l'équation précédente à une transformation infiniment petite, et si l'on remplace dS par pdv, on obient la relation

$$(a) \qquad dQ = A(dU + pdv).$$

D'après ce que nous venons de dire, dU est la différentielle totale d'une fonction de deux variables indépendantes, mais il n'en est pas de même de dQ. Cette relation (a), expression du premier principe fondamental dans les conditions où nous supposons le corps, est celle dont nous nous servirons le plus souvent dans la suite.

39. Nous avons choisi dans ce qui précède les deux va-

riables indépendantes v et p pour définir l'état du corps. U est une fonction de ces deux variables; nous la représenterons par U_{vp}, indiquant les variables indépendantes par des indices, afin d'éviter toute confusion. Si l'on remplace dU par sa valeur

$$dU = \frac{\partial U_{vp}}{\partial v} dv + \frac{\partial U_{vp}}{\partial v} dp,$$

l'équation (a) devient

$$dQ = A\left(\frac{\partial U_{vp}}{\partial v} + p\right) dv + A\frac{\partial U_{vp}}{\partial p} dp,$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$X = A\left(\frac{\partial U_{vp}}{\partial v} + p\right),$$

$$Y = A\frac{\partial U_{vp}}{\partial p},$$

X et Y étant deux fonctions de v et p, elle se réduit à la forme simple

$$(a_1) \qquad dQ = X dv + Y dp.$$

Il existe une relation entre les deux fonctions X et Y. On a, en effet,

$$\frac{\partial X}{\partial p} = A\frac{\partial^2 U}{\partial v \partial p} + A,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = A\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial v}:$$

d'où l'on déduit

$$(\alpha_1) \qquad \frac{\partial X}{\partial p} - \frac{\partial Y}{\partial v} = A.$$

Cette relation montre bien que le second membre de l'équation (a_1) n'est pas une différentielle exacte, car il faudrait pour cela que l'on eût $\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{\partial Y}{\partial v}$, et par suite $A = 0$.

40. Prenons maintenant t et v pour variables indépendantes. U est une fonction de t et v, p est aussi une fonction des mêmes variables d'après la relation $\varphi(t, v, p) = 0$. On a

alors

$$dU = \frac{\partial U_{tv}}{\partial t} dt + \frac{\partial U_{tv}}{\partial v} dv,$$

et l'équation (a) devient

$$dQ = A \frac{\partial U_{tv}}{\partial t} dt + A \left(\frac{\partial U_{tv}}{\partial v} + p \right) dv.$$

Si l'on pose

$$c = A \frac{\partial U_{tv}}{\partial t},$$

$$l = A \left(\frac{\partial U_{tv}}{\partial v} + p \right),$$

c et l étant deux fonctions de t et v, cette équation se réduit à la forme

$$(a_2) \qquad dQ = c\,dt + l\,dv.$$

Les deux fonctions c et l ont une signification physique qu'il importe de remarquer; c est la *chaleur spécifique du corps à volume constant*, et l *la chaleur latente de dilatation*. En effet, si le volume est constant, $dv = 0$, et l'équation se réduit à

$$dQ = c\,dt.$$

Or, si l'on communique au corps une quantité de chaleur ΔQ, le volume restant constant, la température s'élève de Δt; la chaleur spécifique a pour valeur la limite du rapport $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$; elle est égale à c. Au contraire, si la température reste constante, l'équation se réduit à

$$dQ = l\,dv;$$

l est la limite du rapport $\frac{\Delta Q}{\Delta v}$ de la quantité de chaleur reçue par le corps à l'accroissement de volume correspondant; c'est la chaleur latente de dilatation. Lorsque le corps se contracte par la chaleur, Δv est négatif, ainsi que l.

Il existe aussi une relation entre les deux fonctions c et l.

On a, en effet,

$$\frac{\partial c}{\partial v} = A\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial v},$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = A\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial t} + A\frac{\partial p}{\partial t};$$

et, par suite,

$$(\alpha_2) \qquad \frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial v} = A\frac{\partial p}{\partial t}.$$

41. Prenons enfin t et p comme variables indépendantes; U et v doivent être considérées comme des fonctions de t et de p. On a alors

$$dU = \frac{\partial U_{tp}}{\partial t}dt + \frac{\partial U_{tp}}{\partial p}dp,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial p}dp,$$

$$dQ = A\left(\frac{\partial U_{tp}}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t}\right)dt + A\left(\frac{\partial U_{tp}}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p}\right)dp,$$

et si l'on pose

$$C = A\left(\frac{\partial U_{tp}}{\partial t} + p\frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

$$h = A\left(\frac{\partial U_{tp}}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p}\right),$$

C et h étant deux fonctions de t et p, l'équation (a) se met sous une troisième forme

$$(a_3) \qquad dQ = C\,dt + h\,dp.$$

La fonction C est la chaleur spécifique sous pression constante; car c'est la limite du rapport $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, quand la pression ne change pas.

Il existe aussi une relation entre C et h, car on a

$$\frac{\partial h}{\partial t} = A\left(\frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial t} + p\frac{\partial^2 v}{\partial p\,\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial C}{\partial p} = A\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial p} + p\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial p} + \frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

et, par suite,

$$(\alpha_3) \qquad \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial p} = -A\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Les trois formes (a_1), (a_2), (a_3), sous lesquelles nous avons mis l'équation fondamentale (a), correspondent aux trois couples de variables indépendantes v et p, t et v, t et p. Les trois relations (α_1), (α_2), (α_3) qui s'en déduisent, ont été trouvées par M. Clausius.

FONCTION D'INTÉGRABILITÉ.

42. Nous avons vu (n° 39) que, si l'on prend v et p pour variables indépendantes, l'équation fondamentale se met sous la forme

$$(a_1) \qquad dQ = X\,dv + Y\,dp.$$

Nous savons que le second membre n'est pas la différentielle exacte d'une fonction de v et de p; mais on démontre en mathématiques qu'une expression de cette forme, multipliée par une certaine fonction, peut être rendue différentielle exacte; je rappelle en quelques mots la démonstration de cette proposition. Considérons l'équation différentielle

$$X\,dv + Y\,dp = 0;$$

les deux variables v et p sont ici fonctions l'une de l'autre, et cette équation a une intégrale générale. Supposons-la trouvée et mise sous la forme

$$F(v, p) = \mu,$$

μ étant une constante arbitraire. On en déduit

$$F'_v\,dv + F'_p\,dp = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dv} = -\frac{F'_v}{F'_p}.$$

Cette valeur de $\frac{dp}{dv}$ devant être égale à celle que fournit l'équation différentielle, on a

$$\frac{X}{Y} = \frac{F'_v}{F'_p}.$$

Cette équation doit être vérifiée identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de p et de v; on a donc

$$\frac{X}{F'_v} = \frac{Y}{F'_p} = \lambda,$$

λ étant une certaine fonction de v et de p. On en déduit

$$\frac{X}{\lambda} = F'_v, \quad \frac{Y}{\lambda} = F'_p.$$

Si l'on divise maintenant par λ les deux membres de l'équation (a_1), cette équation devient

$$\frac{dQ}{\lambda} = \frac{X}{\lambda} dv + \frac{Y}{\lambda} dp,$$

ou

$$\frac{dQ}{\lambda} = F'_v dv + F'_p dp.$$

Le second membre est alors la différentielle exacte de la fonction $F(v, p)$; désignons cette fonction par μ, il vient alors

$$(7) \qquad \frac{dQ}{\lambda} = d\mu;$$

λ et μ sont deux nouvelles fonctions des variables indépendantes v et p. Le raisonnement que nous venons de faire peut évidemment être répété quelles que soient les variables choisies; il est indépendant du choix de ces variables.

Ainsi : *Il existe une fonction λ des deux variables indépendantes telle, que l'expression $\frac{dQ}{\lambda}$ devient une différentielle exacte.*

43. Il existe même une infinité de fonctions qui jouissent de cette propriété. En effet, soit λ_1 l'une d'elles, on aura

$$\frac{dQ}{\lambda_1} = d\mu;$$

si l'on pose

$$\lambda = \lambda_1 \varphi(\mu),$$

$\varphi(\mu)$ étant une fonction arbitraire de μ, il vient

$$\frac{dQ}{\lambda} = \frac{\lambda_1 d\mu}{\lambda_1 \varphi(\mu)} = \frac{d\mu}{\varphi(\mu)};$$

le second membre est évidemment la différentielle exacte d'une certaine fonction $\psi(\mu)$ qu'on obtiendra en posant

$$\psi(\mu) = \int \frac{d\mu}{\varphi(\mu)}.$$

Ainsi : *Quand on connaît une fonction λ des variables indépendantes qui rend l'expression $\frac{dQ}{\lambda}$ différentielle exacte, on obtient une nouvelle fonction qui jouit de la même propriété en multipliant la première par une fonction arbitraire de μ.*

APPLICATION AUX GAZ PARFAITS.

44. Un gaz parfait serait un gaz satisfaisant d'une manière rigoureuse aux lois expérimentales qui ne sont applicables aux gaz réels que d'une manière approchée. On ne connaît pas de gaz jouissant absolument de ces propriétés, mais les conséquences auxquelles on arrive en supposant les gaz parfaits, sont sensiblement vraies pour les gaz réels.

Première loi expérimentale. *Lois de Mariotte et de Gay-Lussac.* — Ces deux lois, comme nous l'avons vu (n° 34), sont renfermées dans l'équation suivante

$$pv = p_0 v_0 (1 + \alpha t)$$

ou

$$pv = \alpha p_0 v_0 (a + t). \tag{3}$$

Cette équation suppose que la température est mesurée par le thermomètre à air. Les constantes α et p_0 sont les mêmes pour tous les gaz; v_0 est une constante particulière à chaque gaz, c'est le volume spécifique du gaz à la température zéro et sous la pression p_0. En réalité la constante α n'est pas absolument la même pour tous les gaz; mais les différences sont faibles, elles indiquent l'existence d'une loi générale et de

perturbations secondaires. Ainsi, les valeurs de $a = \frac{1}{\alpha}$ sont

Pour l'air..... ...	273,20
Pour l'hydrogène.....	273,13
Pour l'acide carbonique.	273,81

45. Deuxième loi expérimentale. *Loi de Joule.* — De ses expériences sur la détente des gaz, M. Joule a conclu *que l'énergie intérieure d'un gaz dépend uniquement de sa température et non de son volume.* En admettant cette loi nous pourrons poser

$$U = f(t).$$

Il résulte de cette hypothèse plusieurs conséquences importantes.

Première conséquence. — En se reportant à la valeur générale de la chaleur spécifique à volume constant (n° 40), on obtient dans le cas actuel

$$c = A\frac{dU}{dt}. \tag{8}$$

Le second membre est une fonction de la température seule. Ainsi : *La chaleur spécifique d'un gaz à volume constant dépend uniquement de la température de ce gaz.*

Deuxième conséquence. — On a de même, pour la chaleur spécifique sous pression constante (n° 41),

$$C = A\left(\frac{dU}{dt} + p\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

Pour les gaz, nous connaissons la relation (3) qui existe entre le volume, la température et la pression; on en déduit

$$v = \frac{1}{p}\alpha v_0 p_0 (a + t), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\alpha v_0 p_0}{p},$$

et, par suite,

$$C = A\left(\frac{dU}{dt} + \alpha p_0 v_0\right): \tag{9}$$

La chaleur spécifique d'un gaz sous pression constante est aussi une fonction de la température seule du gaz.

46. *Troisième conséquence.* — En retranchant c de C on ɔtient la relation

o) $$C - c = A \alpha p_0 v_0.$$

Ainsi : *L'excès de la chaleur spécifique sous pression con-ante sur la chaleur spécifique à volume constant est un ombre constant pour chaque gaz.*

On en déduit encore

ı) $$\frac{C - c}{v_0} = A \alpha p_0.$$

ette équation signifie que *la différence des chaleurs spéci-ques rapportées à l'unité de volume est une même constante our tous les gaz.*

On peut aussi se servir de cette formule pour déterminer équivalent mécanique de la chaleur. On a, en effet,

ı2) $$E = \frac{1}{A} = \frac{\alpha p_0 v_0}{C - c}.$$

La chaleur spécifique C sous pression constante est déter-minée directement par l'expérience; la chaleur spécifique c à olume constant est donnée indirectement par la vitesse du on dans les gaz. Le second membre est donc connu entière-nent.

C'est de cette manière que le docteur Mayer a donné la remière détermination approchée de l'équivalent mécanique e la chaleur. En appliquant à différents gaz les nombres qui 'oviennent des expériences les plus précises, on obtient les sultats suivants :

Avec l'air.....	$E = 426,0$
Avec l'oxygène..	$E = 425,7$
Avec l'azote.....	$E = 431,3$
Avec l'hydrogène.	$E = 425,3$

Aujourd'hui, on se sert plutôt de l'équation précédente pour lculer la valeur de c.

47. *Quatrième conséquence.* — Puisque $\frac{\partial U}{\partial v} = 0$, l'expression de la chaleur latente de dilatation l des gaz (n° 40) devient

$$l = Ap. \tag{13}$$

La chaleur latente de dilatation est proportionnelle à la pression.

Enfin on a encore (n° 41)

$$h = Ap\frac{\partial v}{\partial p}.$$

D'ailleurs, l'équation

$$v = \frac{1}{p}\alpha p_0 v_0 (a + t)$$

donne

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\alpha p_0 v_0 (a + t)}{p^2} = -\frac{v}{p};$$

il en résnlte la relation très-simple

$$h = -Av. \tag{14}$$

48. *Cinquième conséquence.* — On peut, dans le cas des gaz parfaits, déterminer aisément la fonction d'intégrabilité λ.

Si l'on prend t et v pour variables indépendantes, on a

$$dQ = c\,dt + l\,dv,$$

ou, en remplaçant l par sa valeur Ap,

$$dQ = c\,dt + Ap\,dv.$$

Remplaçons p par sa valeur tirée de l'équation (3), il vient

$$dQ = c\,dt + A\alpha p_0 v_0 (a + t)\frac{dv}{v},$$

d'où

$$\frac{dQ}{a + t} = \frac{c}{a + t}dt + A\alpha p_0 v_0 \frac{dv}{v}.$$

Le second membre est évidemment une différentielle exacte, car c est une fonction de t seulement (n° 45), et les variables sont séparées; c'est la différentielle d'une certaine fonction μ

de t et v, et l'on peut écrire

$$\frac{dQ}{a+t} = d\mu.$$

Ainsi l'une des valeurs de la fonction λ est

$$\lambda = a + t. \tag{15}$$

Si l'on prend t et p pour variables indépendantes, on a

$$dQ = C\,dt + h\,dp,$$

ou, d'après l'équation (14),

$$dQ = C\,dt - Av\,dp.$$

Remplaçons v par sa valeur tirée de l'équation (3), il vient

$$dQ = C\,dt - A\alpha p_0 v_0 (a+t)\frac{dp}{p},$$

d'où

$$\frac{dQ}{a+t} = \frac{C}{a+t}\,dt - A\alpha p_0 v_0 \frac{dp}{p}.$$

Puisque C est une fonction de t seulement (n° 45), le second membre est encore la différentielle exacte d'une certaine fonction μ de t et p. On retrouve pour λ la même valeur $a+t$ que précédemment, et on arriverait encore au même résultat en prenant p et v pour variables indépendantes.

Ainsi, *pour les gaz parfaits, il y a une valeur de la fonction λ qui dépend de la température seulement.*

49. Troisième loi expérimentale. — Nous avons déduit de la loi de Joule que la chaleur spécifique sous pression constante C dépend uniquement de la température; l'expérience indique que *cette chaleur spécifique* C *est indépendante de la température elle-même et que c'est une constante pour chaque gaz.* Admettons aussi cette loi. Puisque la différence $C - c$ est une constante pour chaque gaz, comme nous l'avons vu (n° 46), il résulte de la loi précédente que *la chaleur spécifique à volume constant c est aussi une constante pour chaque gaz.*

50. Ceci va nous permettre de déterminer la forme de la fonction μ. En prenant t et v pour variables indépendantes,

nous avons trouvé

$$\frac{dQ}{a+t} = c\frac{dt}{a+t} + (C-c)\frac{dv}{v}.$$

Comme c et C sont ici des constantes, l'intégrale générale du second membre est

$$\mu = \log B\,(a+t)^c\, v^{C-c},$$

ou, en remplaçant $a+t$ par sa valeur tirée de l'équation (3),

$$\mu = \log \frac{B}{(\alpha p_0 v_0)^c} p^c v^C.$$

Comme la constante B est arbitraire, faisons $\frac{B}{(\alpha p_0 v_0)^c} = 1$, il vient

(16) $$\mu = \log p^c v^C.$$

Si l'on prend t et p pour variables indépendantes, on a

$$\frac{dQ}{a+t} = C\frac{dt}{a+t} - (C-c)\frac{dp}{p}.$$

L'intégrale générale du second membre est

$$\mu = \log B' \frac{(a+t)^C}{p^{C-c}} = \log \frac{B'}{(\alpha p_0 v_0)^c} p^c v^C,$$

ou, en choisissant convenablement la constante B',

$$\mu = \log p^c v^C.$$

On arriverait encore au même résultat en prenant v et p comme variables indépendantes. On a donc pour les gaz parfaits

(17) $$\frac{dQ}{a+t} = d \log p^c v^C.$$

Si un gaz subit des transformations quelconques sans absorber ni dégager de chaleur à aucune phase de la transformation, le premier membre étant constamment nul, il en est de même du second, et le produit $p^c v^C$ reste constant; c'est la *loi de Poisson.*

51. Cherchons encore l'énergie intérieure d'un gaz. On a (n° 45)

$$c = A\frac{dU}{dt},$$

ou

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{A} c = Ec.$$

Comme c est une constante, on en déduit

$$U = U_0 + Ec(t - t_0),$$

U_0 étant la valeur de U à la température t_0. Ainsi *la variation de l'énergie intérieure* U *d'un gaz est proportionnelle à la variation de la température comptée sur le thermomètre à air.* Par suite, l'énergie intérieure pourra servir à mesurer la température.

52. Quatrième loi expérimentale. — L'expérience apprend encore que le rapport $\frac{C}{v_0}$, c'est-à-dire *la chaleur spécifique d'un gaz sous pression constante, ramenée à l'unité de volume, est une même constante pour tous les gaz.*

Mais nous avons vu déjà (n° 46) que le rapport $\frac{C - c}{v_0}$ a une même valeur pour tous les gaz; il en résulte que le rapport $\frac{c}{v_0}$, c'est-à-dire *la chaleur spécifique à volume constant, ramenée à l'unité de volume, est aussi une même constante pour tous les gaz.*

On détermine directement par l'expérience C et v_0 $\left(\text{le poids spécifique du gaz est } \frac{1}{v_0}\right)$; il est aisé de vérifier que le rapport $\frac{C}{v_0}$ est constant; la formule (10) permet de calculer ensuite la chaleur spécifique c à volume constant. On obtient ainsi pour l'hydrogène et l'air atmosphérique les nombres suivants :

	$\frac{1}{v_0}$.	C.	$C - c = A\alpha p_0 v_0$.	$c = C - A\alpha p_0 v_0$.	$\frac{C}{v_0}$.	$\frac{c}{v_0}$.
Air.....	1,29318	0,23751	0,0489	0,1686	0,307	0,218
Hydrogène.	0,08957	3,40900	0,994	2,415	0,305	0,216

53. Pour calculer toutes les quantités qui interviennent dans les transformations des gaz, nous avons admis : 1° l'équation (3) qui renferme la loi de Mariotte et celle de Gay-Lussac (n° 44); 2° la loi de Joule (n° 45); 3° que la chaleur spécifique d'un gaz sous pression constante est indépendante de la température (n° 49); 4° enfin, que la chaleur spécifique sous pression constante rapportée à l'unité de volume est une même constante pour tous les gaz (n° 52).

Les deux dernières lois ont été vérifiées par les expériences de M. Regnault. Les lois de Mariotte et de Gay-Lussac ont été établies depuis longtemps, et M. Regnault a déterminé d'une manière très-précise l'approximation avec laquelle on peut appliquer ces deux lois aux gaz les plus importants, tels que l'air, l'azote, l'hydrogène, l'acide carbonique.

54. Quant à la deuxième loi que l'énergie intérieure d'un gaz dépend de la température seule, elle résulte de certaines conceptions théoriques sur la constitution des gaz, dont nous parlerons plus tard; mais il est bon de dire quelques mots des vérifications expérimentales qui en ont été faites.

Gay-Lussac avait déjà montré que si l'on met en communication un ballon plein de gaz avec un autre ballon vide de même capacité, il se produit dans le premier un abaissement de température et dans le second une élévation de température égale; mais les différences de pression étaient trop faibles pour que les variations de température pussent être évaluées avec précision.

M. Joule a repris cette expérience en choisissant des conditions plus avantageuses. Dans une de ses expériences, M. Joule emploie deux récipients métalliques égaux, réunis à la partie inférieure par un tube à robinet et plongés dans un même calorimètre à eau. L'un des vases A contenait 120 grammes d'air sec à la pression de 22 atmosphères, l'autre vase B est vide, ou du moins renfermait de l'air à une pression de un millième d'atmosphère. Quand on ouvre le robinet, le gaz se répartit également dans les deux récipients, le volume est doublé, la pression devient moitié moindre et le calorimètre n'accuse aucune variation de température.

L'air contenu dans le vase A avant le mélange est à une température t et il possède une certaine énergie intérieure. Le vase B étant vide, le gaz double de volume, sans effectuer aucun travail extérieur; d'ailleurs le calorimètre n'indiquant aucune variation de température, la transformation s'est opérée sans absorption ni dégagement de chaleur. Si dans l'équation générale

$$(5) \qquad EQ = \Delta U + S,$$

on fait $S = 0$ et $Q = 0$, il vient $\Delta U = 0$. Ainsi, l'énergie intérieure du gaz est restée constante pendant la transformation; elle est donc indépendante du volume et fonction de la température seule.

Dans une autre expérience, M. Joule a séparé les deux vases et les a placés dans deux calorimètres différents, en ayant soin d'entourer d'un manchon le tube de communication, afin d'éviter autant que possible les pertes de chaleur qui pourraient avoir lieu par ce tube. L'un des vases A renferme encore un gaz à la pression de 22 atmosphères, l'autre B étant vide à peu près. Quand on établit la communication, le calorimètre qui renfermait le gaz comprimé se refroidit, l'autre s'échauffe, mais il y a compensation exacte entre la chaleur absorbée d'un côté et la chaleur dégagée de l'autre. Le gaz comprimé prend pendant la détente une vitesse très-sensible qui donne lieu à une disparition d'énergie calorifique transformée en énergie sensible. Quand le gaz arrive dans le vase B, son mouvement de translation se transforme en mouvement vibratoire par les chocs contre les parois, l'énergie sensible disparaît et reproduit de l'énergie calorifique. Mais nous aurons l'occasion plus tard d'étudier ce phénomène.

Cette dernière expérience de M. Joule a été vérifiée par M. Regnault dans des circonstances très-variées.

CHAPITRE II.

THÉORÈME DE CARNOT.

Transformations reversibles. — Lignes de transformation. — Cycle de Carnot. — Loi expérimentale de Clausius. — Théorème de Carnot. — Détermination de la fonction d'intégrabilité; température absolue. — Équations de William Thomson. — Équation de Rankine. — Remarques sur le théorème de Carnot.

---

55. Dans l'étude des transformations d'un corps homogène, sans mouvement sensible et soumis à une pression uniforme, nous ne nous sommes servi jusqu'à présent que du principe de l'équivalence, qui n'est qu'une conséquence de l'hypothèse fondamentale sur la nature de la chaleur et du théorème des forces vives. Nous en avons déduit (35) pour une transformation quelconque AB l'équation

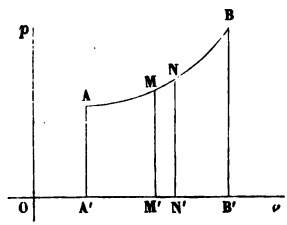
$$(1) \qquad EQ = \Delta U + S.$$

Nous avons vu aussi (n° 42) qu'on a pour une transformation infiniment petite MN l'équation

$$(2) \qquad \frac{dQ}{\lambda} = d\mu,$$

dans laquelle λ et μ sont des fonctions des variables indépendantes.

Fig. 5.



Quand le corps passe de l'état A à l'état B, que nous caractériserons par les indices 1 et 2, la quantité de chaleur qu'il a

absorbée ou dégagée est, d'après l'équation (2),

$$Q = \int_1^2 \lambda d\mu.$$

Comme nous l'avons remarqué au n° 38, cette intégrale ne dépend pas seulement de l'état initial et de l'état final du corps, mais aussi de la suite des transformations, ou de la courbe suivie pour aller de A en B.

On a aussi

$$\int_1^2 \frac{dQ}{\lambda} = \mu_2 - \mu_1.$$

Le second membre de cette équation ne dépend que de l'état initial et de l'état final, et nullement de la suite des transformations ou du chemin suivi AMB; le premier membre est donc aussi indépendant de la suite des transformations.

En particulier, si le corps revient à son état primitif, puisque $\mu_2 = \mu_1$, on a

$$\int \frac{dQ}{\lambda} = 0.$$

Nous allons maintenant établir le second principe fondamental de la thermodynamique; nous commencerons par quelques considérations préliminaires.

TRANSFORMATIONS REVERSIBLES.

56. Quand un corps éprouve des transformations quelconques, accompagnées de phénomènes calorifiques, il arrive quelquefois que les changements inverses peuvent avoir lieu précisément dans les mêmes circonstances; on dit alors que la transformation est *reversible*. Au contraire, la transformation est dite non reversible, si les circonstances sont telles qu'en les reproduisant dans l'ordre inverse on ne puisse pas faire repasser le corps par les mêmes états.

Imaginons, par exemple, qu'un corps extérieur indéfini K, parfaitement conducteur, soit constamment en communication avec le corps dont nous suivons les transformations, et lui fournisse ou lui enlève de la chaleur de façon que les deux corps soient toujours à la même température; la transforma-

tion sera évidemment reversible. Si le corps a été de l'état A à l'état B en suivant un certain chemin AMB, il pourra revenir de l'état B à l'état A par le même chemin BMA en sens inverse. S'il absorbait dans une phase MN de la transformation directe une certaine quantité de chaleur, il en dégagera une quantité égale dans la phase correspondante NM de la transformation inverse. Si le travail extérieur MNN'M' était positif dans le premier cas, il sera négatif dans le second cas, et le même en valeur absolue.

Pour que la transformation soit reversible, il est nécessaire que le corps extérieur K soit toujours à la même température que le corps dont on suit les transformations; car si le corps extérieur K était à une température plus élevée que l'autre, il pourrait bien lui céder la chaleur nécessaire pour accomplir la phase MN de la transformation directe, mais il ne pourrait pas recevoir la chaleur que le corps doit dégager dans la phase inverse NM, et la transformation inverse serait impossible.

Il est une seconde condition à remplir pour qu'une transformation soit reversible. Nous avons appelé p la pression qui correspond au volume spécifique v et à la température t dans l'état d'équilibre. Pour que la transformation soit reversible, il est nécessaire que la pression extérieure, que nous désignerons par p', soit constamment égale à p. Si la pression extérieure p' était moindre que p, le corps pourrait bien se dilater; mais la transformation inverse serait impossible. Au contraire, si la pression extérieure p' était plus grande que p, le corps pourrait se contracter, mais la transformation inverse serait impossible.

Dans ce qui suivra, nous supposerons toujours ces deux conditions remplies, c'est-à-dire les transformations reversibles.

DES LIGNES DE TRANSFORMATION.

57. Parmi les diverses lignes de transformation, il en est quelques-unes dont nous ferons fréquemment usage et qu'il est bon de distinguer par des noms particuliers.

1° Un corps peut éprouver une suite de transformations sans

absorber ni dégager de chaleur à aucun moment; la ligne qui représente cette suite de transformations a été appelée ligne de *nulle transmission* par Verdet, et ligne *adiabatique* par M. Rankine.

2° Si le corps reçoit ou perd de la chaleur, de manière que sa température reste constante, la ligne qui représente la suite des transformations est dite ligne *isotherme*.

3° Enfin on appelle ligne d'*égale énergie* une ligne de transformation telle que le corps conserve constamment la même énergie intérieure.

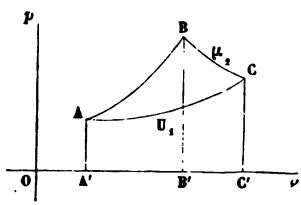
Quand on connaît la loi de transformation d'un corps, on peut obtenir facilement les équations de ces différentes lignes. Prenons p et v comme variables indépendantes; toutes les autres grandeurs qui dépendent de l'état du corps sont des fonctions de ces deux variables, et l'on a

$$t = f(v, p),$$
$$U = F(v, p),$$
$$\mu = \mathcal{F}(v, p).$$

Si l'on regarde t comme une constante dans la première équation, cette équation représentera une ligne isotherme; c'est donc l'équation générale des lignes isothermes. De même, la seconde, dans laquelle on regarde U comme une constante, est l'équation générale des lignes d'égale énergie, et la troisième, dans laquelle on regarde μ comme une constante, est l'équation générale des lignes adiabatiques.

58. Supposons, par exemple, qu'un corps passe de l'état

Fig. 6.



$A(v_1, p_1)$ à l'état $B(v_2, p_2)$ en suivant la ligne de transforma-

tion AB. Menons par le point A la ligne d'égale énergie U_1 et par le point B la ligne adiabatique μ_1; ces deux lignes se coupent au point C. L'équation fondamentale

$$(1) \qquad EQ = \Delta U + S$$

devient ici

$$EQ = U_2 - U_1 + S.$$

Le travail extérieur S accompli par le corps est représenté par l'aire du trapèze curviligne ABB'A'. Je dis que la variation d'énergie intérieure $U_2 - U_1$ est représentée par l'aire du trapèze BCC'B'. Supposons, en effet, que le corps aille de l'état B à l'état C en suivant la ligne adiabatique μ_1; comme la chaleur gagnée par le corps est nulle, et que l'énergie intérieure est la même au point C qu'au point A, on aura, en appelant S' le travail extérieur accompli par cette transformation,

$$U_1 - U_2 + S' = 0,$$

ou

$$U_2 - U_1 = S'.$$

L'énergie intérieure diminue et se transforme en travail, et ce travail S' est représenté par l'aire du trapèze curviligne BCC'B'. La quantité de chaleur Q communiquée au corps pendant la transformation AB est figurée en unités mécaniques par la somme des deux aires ABB'A' + BCC'B'.

59. Ces différentes lignes sont faciles à déterminer lorsque le corps est un gaz parfait.

On voit d'abord qu'elles se réduisent à deux espèces seulement; car l'énergie d'un gaz sans mouvement sensible (n° 45) ne dépendant que de la température, dans toute transformation où la température restera constante, l'énergie intérieure restera aussi constante; pour un gaz parfait, les lignes isothermes et les lignes d'égale énergie sont donc identiques.

Chaque ligne isotherme est une hyperbole équilatère donnée par l'équation

$$pv = \alpha p_0 v_0 (a + t),$$

dans laquelle on considère t comme une constante.

Nous avons trouvé (n° 49)

$$\mu = \log v^C p^c.$$

En considérant μ comme une constante, l'équation des lignes adiabatiques sera donc

$$v^C p^c = e^\mu.$$

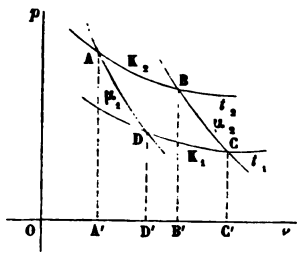
Ce sont aussi des courbes de forme hyperbolique, asymptotes aux deux axes des coordonnées ov et op; la constante C étant plus grande que c, l'ordonnée p décroît plus rapidement que celle de l'hyperbole équilatère, quand v augmente.

CYCLE DE CARNOT.

60. On appelle *cycle* une suite de transformations telles que le corps revienne à son état primitif. Parmi tous les cycles imaginables, il en est un qui joue un rôle important dans cette théorie; il est formé de deux lignes isothermes et de deux lignes adiabatiques: on l'appelle cycle de Carnot.

Considérons deux lignes isothermes DC et AB, correspondant, la première à la température t_1, la seconde à une température plus élevée t_2, et deux lignes adiabatiques AD et BC correspondant aux valeurs μ_1 et μ_2. Si le corps part de l'état A et y revient après avoir éprouvé les transformations

Fig. 7.



successives AB, BC, CD, DA, il aura suivi un cycle de Carnot. Pour que cette transformation soit possible, il faut concevoir deux corps étrangers indéfinis parfaitement conducteurs, l'un K_2 à la température t_2, l'autre K_1 à la température t_1, avec lesquels le corps considéré sera mis alternativement en com-

munication. Supposons le cycle parcouru dans le sens ABCDA, que nous appellerons *direct*.

1° Pendant la transformation AB, le corps est à la température constante t_2; il reçoit du corps extérieur K_2 une certaine quantité de chaleur Q_2; cette chaleur produit une variation d'énergie intérieure et un travail extérieur positif figuré par l'aire du trapèze ABB'A'.

2° Pendant la transformation BC suivant une ligne adiabatique, le corps n'a aucune communication calorifique avec l'extérieur, il ne reçoit ni ne perd de la chaleur, l'énergie intérieure diminue et se transforme en un travail extérieur positif BCC'B'.

En allant de l'état A à l'état C le corps a donc effectué un travail extérieur figuré par l'aire ABCC'A'.

3° Pendant la transformation CD à la température constante t_1, le travail extérieur est négatif. La pression extérieure fournit au corps une certaine quantité de travail CDD'C'; ce travail produit une variation d'énergie intérieure, et le dégagement d'une certaine quantité de chaleur Q_1, qui se porte sur le corps extérieur K_1 en contact avec le corps considéré, et à la même température que lui.

4° Enfin le long de la ligne adiabatique DA, toute communication de chaleur est de nouveau supprimée; le travail extérieur reçu DAA'D' augmente l'énergie intérieure du corps et ramène le corps à l'état primitif A.

Le corps, dont nous avons considéré les transformations, est une véritable machine fonctionnant suivant le cycle de Carnot. Elle est alternativement en communication avec le corps extérieur K_2, auquel elle enlève une certaine quantité de chaleur Q_2 à la température constante t_2, et avec le corps extérieur K_1, auquel elle cède une quantité de chaleur Q_1 à la température constante t_1.

Après chaque cycle, l'énergie intérieure U reprenant sa valeur primitive, on a $\Delta U = 0$ et l'équation fondamentale

$$EQ = \Delta U + S \tag{1}$$

se réduit à

$$EQ = S.$$

La quantité de chaleur $Q = Q_2 - Q_1$ gagnée par la machine est changée en une quantité équivalente S de travail extérieur; cette quantité de travail S est la différence entre le travail ABCC'A' produit par la machine et le travail reçu CDAA'C'; elle est figurée par l'aire du cycle ABCD.

61. Il est clair qu'une pareille machine est reversible. Supposons qu'elle fonctionne en sens inverse en partant de l'état D.

Suivant la ligne isotherme DC, la machine prend au corps extérieur K_1 une quantité de chaleur qui est précisément égale à Q_1, elle éprouve une variation d'énergie intérieure et produit un travail extérieur figuré par l'aire DCC'D'. Suivant la ligne adiabatique CB, elle reçoit un travail extérieur CBB'C' qui produit un accroissement d'énergie intérieure. Suivant la ligne isotherme BA, la machine éprouve une variation d'énergie intérieure, reçoit un travail extérieur BAA'B' et cède au corps extérieur K_2 la quantité de chaleur Q_2. Enfin, suivant la ligne adiabatique AD, il y a une diminution d'énergie intérieure qui produit le travail extérieur ADD'A'.

Dans ce jeu inverse, la machine prend à la source inférieure K_1 une quantité de chaleur Q_1 et verse sur la source supérieure K_2 une quantité de chaleur plus grande Q_2; il y a création d'une quantité de chaleur $Q_2 - Q_1$. En même temps la machine a reçu une quantité de travail extérieur CBAA'C' plus grande que celui ADCC'A' qu'elle a accompli; la différence S est figurée par l'aire du cycle ABCD. Cette quantité S de travail absorbée par la machine est transformée en une quantité équivalente de chaleur, et l'on a l'équation

$$S = E(Q_2 - Q_1).$$

Ainsi, dans le jeu direct, la quantité de chaleur $Q_2 - Q_1$ est transformée en une quantité équivalente S de travail extérieur accompli par la machine; c'est une *machine motrice*. Dans le jeu inverse, il y a eu au contraire transformation d'une quantité S de travail extérieur en une quantité équivalente $Q_2 - Q_1$ de chaleur; on a alors une *machine créant de la chaleur par le travail*.

LOI EXPÉRIMENTALE DE CLAUSIUS.

62. Lorsque deux corps parfaitement conducteurs K_2 et K_1, le premier à une température t_2, le second à une température inférieure t_1, sont en communication directe d'une manière quelconque, soit par rayonnement, soit par conductibilité, la chaleur passe du corps K_2 au corps K_1, et, si l'on suppose ces deux corps infiniment grands de manière que leurs températures ne changent pas sensiblement, le passage de la chaleur a lieu indéfiniment dans le même sens et d'une manière uniforme. Supposons maintenant que ces deux corps conducteurs soient mis en relation, non plus directement, mais par l'intermédiaire d'une machine fonctionnant suivant le cycle de Carnot, M. Clausius admet que, quelle que soit la combinaison adoptée, il est impossible de transporter de la chaleur du corps le plus froid K_1 sur le corps le plus chaud K_2 sans une dépense de travail.

Cette loi n'est pas absolument évidente, mais on l'admet comme une généralisation de la manière dont s'effectue le passage de la chaleur entre deux corps mis en communication directe l'un avec l'autre.

THÉORÈME DE CARNOT.

63. Ce théorème consiste en ce que, *pour tous les corps fonctionnant suivant des cycles de Carnot entre les mêmes limites de température, le rapport de la quantité de chaleur puisée à la source supérieure à la quantité de chaleur transformée en travail est constant.*

Concevons différents corps fonctionnant dans le sens direct suivant des cycles de Carnot, formés de lignes adiabatiques quelconques et de lignes isothermes correspondant aux mêmes températures t_2 et t_1; ces lignes isothermes ne sont pas pour cela identiques, puisque leur forme dépend de la nature des corps. Si l'on appelle Q_2, Q'_2, Q''_2,... les quantités de chaleur que ces différents corps empruntent à la source supérieure K_2, Q_1, Q'_1, Q''_1,... les quantités de chaleur qu'ils

cèdent à la source inférieure K_1, le théorème de Carnot signifie que les rapports

$$\frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{Q''_2}{Q''_2 - Q''_1} = \ldots.$$

sont égaux.

Nous pouvons nous borner à considérer deux corps ; il s'agit de démontrer que l'on a

$$\frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_2 - Q'_1}, \quad \text{ou} \quad \frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{Q_2}{Q'_2}.$$

Nous allons faire voir que si ces deux rapports n'étaient pas égaux, on serait conduit à une conséquence en contradiction avec la loi expérimentale de M. Clausius.

Supposons le premier rapport commensurable et égal au rapport de deux nombres entiers m et n,

$$(3) \qquad \frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{m}{n},$$

et admettons que le deuxième rapport $\frac{Q_2}{Q'_2}$ diffère du premier, soit par exemple plus petit. On aurait

$$\frac{Q_2}{Q'_2} < \frac{m}{n},$$

ou

$$(4) \qquad mQ'_2 - nQ_2 > 0.$$

Appelons A et B les deux corps considérés, fonctionnant, le premier suivant le cycle (A), le second suivant le cycle (B). Formons avec ces deux corps une machine complexe dans laquelle le corps A parcoure n fois le cycle (A) dans le sens direct, pendant que le second (B) parcoure m fois le cycle (B) dans le sens inverse.

Évaluons d'abord le travail extérieur accompli par la machine pendant cette période de fonctionnement. A chaque cycle, le corps A transforme la quantité $Q_2 - Q_1$ de chaleur en travail; pendant toute la période, il a donc effectué le travail

$$nE(Q_2 - Q_1).$$

Le corps B produit à chaque cycle la quantité de chaleur $Q'_2 - Q'_1$; il absorbe donc pendant la même période une quantité de travail égale à

$$mE(Q'_2 - Q'_1).$$

Il en résulte que le travail total accompli par la machine est

$$nE(Q_2 - Q_1) - mE(Q'_2 - Q'_1),$$

quantité nulle d'après la relation (3). La machine ne dépense donc ni ne produit aucun travail extérieur.

Évaluons maintenant les échanges de chaleur. Le corps A, fonctionnant dans le sens direct, enlève à la source supérieure K_2, pendant la période considérée, la quantité de chaleur nQ_2 et porte sur la source inférieure une quantité de chaleur nQ_1. Le corps B, fonctionnant en sens inverse, enlève à la source K_1 une quantité de chaleur mQ'_1, et porte sur la source K_2 une quantité de chaleur mQ'_2. La source supérieure a donc reçu la quantité de chaleur

$$mQ'_2 - nQ_2,$$

et la source inférieure a perdu la quantité

$$mQ'_1 - nQ_1.$$

Ces deux quantités de chaleur sont égales d'après l'équation (3), et elles sont positives d'après la relation (4). Ainsi la machine transporterait une quantité de chaleur $mQ'_1 - nQ_1$ de la source inférieure à la source supérieure sans aucune dépense de travail, ce qui est contraire à la loi expérimentale de M. Clausius.

On démontrerait de même que le second rapport ne peut être plus grand que le premier; ces deux rapports sont donc égaux, et l'on a

$$(5) \qquad \frac{Q_2 - Q_1}{Q'_2 - Q'_1} = \frac{Q_2}{Q'_2}, \quad \text{ou} \quad \frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_2 - Q'_1}.$$

64. Corollaire. — Des rapports égaux $\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_2 - Q'_1}{Q'_1}$,

on déduit

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q'_1}{Q'_2}. \tag{6}$$

Ainsi, *pour tous les corps fonctionnant suivant des cycles de Carnot, entre les mêmes limites de température, le rapport* $\frac{Q_2}{Q_1}$ *de la quantité de chaleur puisée à la source supérieure à la quantité de chaleur cédée à la source inférieure est constant.*

Ce rapport est le même pour tous les corps; il est indépendant des lignes adiabatiques μ_1 et μ_2 qui forment le cycle; il dépend uniquement des températures extrêmes t_2 et t_1. Nous allons nous servir de cette propriété pour déterminer la forme des fonctions λ que nous avons considérées déjà et qui rendent l'équation fondamentale intégrable.

DÉTERMINATION DE LA FONCTION D'INTÉGRABILITÉ. TEMPÉRATURE ABSOLUE.

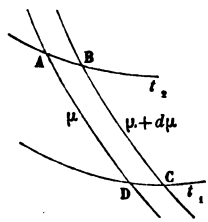
65. Supposons qu'une machine fonctionne suivant le cycle de Carnot ABCD, formé par deux lignes isothermes t_2 et t_1, et deux lignes adiabatiques infiniment voisines. Il suffira de poser $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \mu + d\mu$. Pour toute transformation infiniment petite n° (**41**), on sait que l'on a

$$dQ = \lambda d\mu,$$

λ étant une fonction des variables indépendantes.

Appelons λ_1 la valeur de cette fonction au point D et λ_2 la

Fig. 8.



valeur de la même fonction au point A. On a donc, pour la

transformation DC,

$$Q_1 = \lambda_1 \, d\mu,$$

et, pour la transformation AB,

$$Q_2 = \lambda_2 \, d\mu.$$

La valeur de $d\mu$ est la même pour ces deux transformations, puisqu'elles ont lieu entre les deux mêmes lignes adiabatiques μ et $\mu + d\mu$. On en déduit

$$\lim. \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Mais nous venons de voir que le rapport $\frac{Q_2}{Q_1}$ est indépendant des lignes adiabatiques μ_1 et μ_2, c'est-à-dire dans le cas actuel de μ et $d\mu$, et le même pour tous les corps; donc le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ des valeurs de λ aux points correspondants A et D de deux lignes isothermes t_2 et t_1 (nous appelons points correspondants les points situés sur une même ligne adiabatique μ) est indépendant de μ, et pour tous les corps c'est une même fonction de t_1 et t_2.

66. Il en résulte que la fonction λ est égale à une même fonction $f(t)$ de la température pour tous les corps, multipliée par une fonction de μ particulière et arbitraire pour chaque corps, c'est-à-dire que l'on a

$$\lambda = f(t) \times \varphi(\mu). \tag{7}$$

On peut vérifier d'abord que cette condition est suffisante; car si elle est remplie, on a

$$\lambda_1 = f(t_1) \times \varphi(\mu),$$
$$\lambda_2 = f(t_2) \times \varphi(\mu);$$

d'où

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{f(t_2)}{f(t_1)}.$$

Le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est alors pour tous les corps une même fonction des températures t_2 et t_1.

Je dis maintenant que cette forme de la fonction λ est une ›nséquence nécessaire du théorème de Carnot. En effet, si le pport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ dépend uniquement des températures t_2 et t_1, il en est : même du rapport $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$, qui est égal à $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1$, et aussi du pport

$$\frac{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}}{\lambda_1}.$$

naginons que les deux lignes isothermes t_1 et t_2 soient inniment voisines l'une de l'autre; il suffit pour cela de poser $= t$, $t_2 = t + dt$. Nous pouvons prendre t et μ comme vaables indépendantes, c'est-à-dire déterminer chaque point ou aque état du corps par l'intersection d'une ligne isotherme t d'une ligne adiabatique μ. La quantité λ est alors une foncon de t et μ; la limite du rapport $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}$ est la dérivée partielle de cette fonction par rapport à t, en supposant μ constante. n a ainsi

$$\lim. \frac{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1}}{\lambda_1} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial t}}{\lambda}.$$

vertu de ce qui précède, ce rapport est pour tous les ps une même fonction $\psi(t)$ de la température; on peut ıc écrire

$$\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial t}}{\lambda} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial t} = \psi(t).$$

intégrant par rapport à la variable t, et remarquant que onstante introduite par l'intégration est une fonction arraire de l'autre variable μ, on a

$$\log \lambda = \int \psi(t)\, dt + \log \varphi(\mu),$$

$$\lambda = \varphi(\mu)\, e^{\int \psi(t)\, dt}.$$

l'on pose

$$e^{\int \psi(t)\, dt} = f(t),$$

il vient

$$\lambda = f(t)\,\varphi(\mu),$$

La fonction $\psi(t)$ étant la même pour tous les corps, il en est de même de la fonction $f(t)$. Ainsi la forme que nous avons attribuée à la fonction λ est une conséquence du théorème de Carnot.

Comme la fonction $\varphi(\mu)$ est arbitraire, on peut prendre

$$\varphi(\mu) = 1,$$

ce qui donne

$$\lambda = f(t).$$

Ainsi, *parmi les fonctions d'intégrabilité, il y en a une, fonction de la température seule, et la même pour tous les corps.*

67. Il est naturel de se servir de cette fonction λ pour construire une échelle des températures que nous appellerons échelle des *températures absolues*. Si l'on désigne par T la température absolue, ceci revient à poser $T = \lambda$.

Cette échelle est connue; nous avons trouvé pour les gaz parfaits (n° 48) $\lambda = a + t$, t étant la température marquée par le thermomètre à air, et la constante a ayant une valeur égale à 273; cette fonction λ de la température seule, étant la même pour tous les corps, on a, d'une manière générale, $\lambda = a + t$, et par suite

$$(8) \qquad T = a + t.$$

Ainsi l'échelle des températures absolues coïncide avec celle du thermomètre à air; il suffit de supposer le zéro absolu placé à 273 degrés au-dessous du zéro ordinaire.

L'existence d'une fonction d'intégrabilité λ, la même pour tous les corps et qui nous a servi à définir la température absolue, constitue le second principe fondamental de la théorie mécanique de la chaleur; il se traduit par l'équation

$$(b) \qquad \frac{dQ}{T} = d\mu,$$

où μ est une fonction déterminée des deux variables indépendantes, et particulière à chaque espèce de corps.

68. Pour une transformation finie quelconque, on a

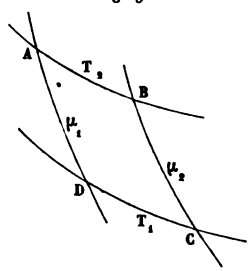
$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \mu_2 - \mu_1, \tag{9}$$

μ_1 et μ_2 étant les valeurs de la fonction μ au commencement et à la fin. Si la transformation s'accomplit suivant une ligne isotherme, T étant constant, l'équation précédente devient

$$\frac{Q}{T} = \mu_2 - \mu_1. \tag{10}$$

On en conclut que *la quantité de chaleur nécessaire pour opérer une transformation suivant une ligne isotherme quelconque, entre deux lignes adiabatiques données, est proportionnelle à la température absolue.*

Fig. 9.



Le cycle de Carnot (n° 60) est formé de deux lignes isothermes AB et DC comprises entre deux lignes adiabatiques AD et BC. On a donc, en vertu de la relation (10),

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1} = \mu_2 - \mu_1, \tag{11}$$

ou

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}. \tag{12}$$

Telle est, dans l'expression du théorème de Carnot (n° 63),

la valeur du rapport de la quantité de chaleur transformée en travail à la quantité de chaleur puisée à la source supérieure.

69. Le second principe fondamental (b) est une conséquence immédiate du théorème de Carnot, que nous avons établi à l'aide d'une loi expérimentale de M. Clausius, extension des lois ordinaires relatives à l'équilibre de la température et à la communication de la chaleur. On comprendra bien toute l'importance du théorème de Carnot et l'immense service qu'il a rendu à la science, si l'on se rappelle que l'on ne connaît pas pour les corps quelconques les conditions mécaniques de l'équilibre de la température. Il semblait donc que la notion d'égalité de température dût rester une notion purement empirique et que la théorie de la chaleur fût arrêtée dès ses premiers pas. Heureusement le théorème de Carnot a permis de tourner la difficulté, en établissant une relation générale (b) entre la quantité de chaleur et la température.

70. La même difficulté n'existe pas pour les gaz parfaits. A l'aide de leurs propriétés connues, nous avons démontré directement l'existence d'une fonction d'intégrabilité commune à tous les gaz et dépendant de la température seule; cette fonction est $\lambda = a + t = T$ (nous posons ici pour abréger $T = a + t$). On en déduit $\frac{dQ}{T} = d\mu$. La relation $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$ (n° 68), et par conséquent le théorème de Carnot, est une conséquence de cette propriété.

Nous avons démontré d'une manière générale (n° 66), et sans avoir recours à aucune propriété particulière, l'existence d'une fonction d'intégrabilité commune à tous les corps et ne dépendant que de la température. Si l'on fait usage des propriétés des gaz parfaits, on peut simplifier un peu la démonstration. Considérons un corps quelconque et un gaz fonctionnant suivant des cycles de Carnot entre les mêmes limites de température T_2 et T_1; on a, d'après le théorème de Carnot (n° 64),

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q'_2}{Q'_1},$$

les quantités de chaleur Q_2 et Q_1 se rapportant au corps considéré, les quantités Q'_2 et Q'_1 au gaz. Mais, d'après les propriétés des gaz, ce dernier rapport est connu et égal à $\frac{T_2}{T_1}$; on a donc $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Nous avons vu (n° 65) que, si l'on suppose le cycle compris entre deux lignes adiabatiques infiniment voisines μ et $\mu + d\mu$, la limite du rapport $\frac{Q_2}{Q_1}$ est égale à $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; on a donc $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_2}{T_1}$, ou $\frac{\lambda_2}{T_2} = \frac{\lambda_1}{T_1}$. On en conclut que le rapport $\frac{\lambda}{T}$ conserve une valeur constante le long d'une ligne adiabatique DA; c'est donc une fonction de μ, indépendante de T, et l'on a $\lambda = T\varphi(\mu)$. Mais on sait (n° 43) que quand on a trouvé une fonction d'intégrabilité, on en obtient une autre en multipliant ou divisant la première par une fonction arbitraire de μ; si l'on divise la précédente par $\varphi(\mu)$, on a $\lambda = T$.

EQUATIONS DE WILLIAM THOMSON.

71. M. William Thomson a déduit du second principe fondamental

$$(b) \qquad \frac{dQ}{T} = d\mu$$

plusieurs relations importantes.

Quand on prend v et p pour variables indépendantes, on a

$$dQ = X\,dv + Y\,dp,$$

et, par suite,

$$d\mu = \frac{dQ}{T} = \frac{X}{T}\,dv + \frac{Y}{T}\,dp.$$

Le second membre étant une différentielle exacte, on doit avoir

$$\frac{\partial\left(\frac{X}{T}\right)}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{Y}{T}\right)}{\partial v},$$

ou

$$T\frac{\partial X}{\partial p} - X\frac{\partial T}{\partial p} = T\frac{\partial Y}{\partial v} - Y\frac{\partial T}{\partial v},$$

$$X\frac{\partial T}{\partial p} - Y\frac{\partial T}{\partial v} = T\left(\frac{\partial X}{\partial p} - \frac{\partial Y}{\partial v}\right).$$

A l'aide de l'équation (α_1) de M. Clausius (n° 39), cette équation se simplifie et devient

$$(\beta_1) \qquad X\frac{\partial T}{\partial p} - Y\frac{\partial T}{\partial v} = AT.$$

72. Prenons maintenant T et v pour variables indépendantes. On a alors

$$dQ = c\,dt + l\,dv = c\,dT + l\,dv,$$

ou

$$\frac{dQ}{T} = \frac{c}{T}dT + \frac{l}{T}dv.$$

Cette expression étant une différentielle exacte, on a de même

$$\frac{\partial\frac{c}{T}}{\partial v} = \frac{\partial\frac{l}{T}}{\partial T},$$

ou

$$T\frac{\partial c}{\partial v} = T\frac{\partial l}{\partial T} - l,$$

$$l = T\left(\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial c}{\partial v}\right).$$

En vertu de la seconde équation (α_2) de M. Clausius (n° 40), cette équation se réduit à

$$(\beta_2) \qquad l = AT\frac{\partial p}{\partial T}.$$

73. Prenons enfin t et p comme variables indépendantes. On a

$$dQ = C\,dT + h\,dp,$$

ou

$$\frac{dQ}{T} = \frac{C}{T}dT + \frac{h}{T}dp,$$

ce qui donne l'équation de condition

$$\frac{\partial \frac{C}{T}}{\partial p} = \frac{\partial \frac{h}{T}}{\partial T},$$

ou

$$T\frac{\partial C}{\partial p} = T\frac{\partial h}{\partial T} - h,$$

$$h = T\left(\frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial C}{\partial p}\right).$$

La troisième équation (α_3) de M. Clausius (n° 41) ramène cette équation à la forme simple

$$(\beta_3) \qquad h = -AT\frac{\partial v}{\partial T}.$$

74. L'équation (β_1) est une équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle doit satisfaire la fonction T des deux variables indépendantes v et p. Dans l'équation (β_2) p est regardée comme une fonction de T et v, et dans l'équation (β_3) v comme une fonction de T et p. Mais on peut transformer ces deux dernières équations en des équations aux dérivées partielles, auxquelles doivent satisfaire la même fonction T des deux variables indépendantes v et p.

Représentons, en effet, par

$$\varphi(T, v, p) = 0$$

la relation inconnue qui existe entre la température, le volume spécifique et la pression. Si l'on y regarde v comme une constante, les deux quantités variables T et p seront fonctions l'une de l'autre, et il est évident que les deux dérivées $\frac{\partial T}{\partial p}, \frac{\partial p}{\partial T}$ que l'on obtient en considérant, soit p comme une fonction de T, soit T comme une fonction de p, ont un produit égal à l'unité. L'équation (β_2) peut donc être remplacée par la suivante

$$(\beta'_2) \qquad l\frac{\partial T}{\partial p} = AT.$$

De même, si l'on regarde p comme constante, les deux quantités T et v seront fonctions l'une de l'autre, et les deux dérivées $\frac{\partial v}{\partial T}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$ auront un produit égal à l'unité; l'équation (β_3) deviendra

$$(\beta'_3) \qquad h\frac{\partial T}{\partial v} = -AT.$$

Il résulte de là que la même fonction T des deux variables indépendantes v et p satisfait aux trois équations aux dérivées partielles (β_1), (β'_2), (β'_3). La première équation contient les deux dérivées partielles, chacune des deux autres n'en contient qu'une.

ÉQUATION DE RANKINE.

75. Nous avons vu (n° 68) que la quantité de chaleur nécessaire pour effectuer une transformation suivant une ligne isotherme AB est donnée par la formule

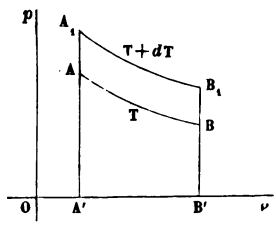
$$(13) \qquad Q = T(\mu_2 - \mu_1).$$

M. Rankine a trouvé de cette même quantité de chaleur une autre expression qu'il est bon de connaître. Si l'on appelle S le travail extérieur accompli par le corps pendant la transformation AB, on a

$$S = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv.$$

Imaginons que le corps parcoure une autre ligne isotherme A_1B_1 limitée aux mêmes valeurs v_1 et v_2 du volume spécifique,

Fig. 10.



c'est-à-dire comprise entre les parallèles AA', BB'; le travail

extérieur accompli dans une de ces transformations est une fonction de la température de la ligne isotherme correspondante. Prenons v et T pour variables indépendantes, et supposons la ligne isotherme A_1B_1 infiniment voisine de AB; la variation de travail pour ce changement de ligne isotherme est figuré par l'aire AA_1B_1B, et l'on a

$$\frac{dS}{dT} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial p}{\partial T} dv.$$

L'équation générale

$$dQ = c\,dT + l\,dv$$

se réduit, pour une ligne isotherme, à

$$dQ = l\,dv.$$

En remplaçant l par sa valeur tirée de l'équation (β_2), on a

$$dQ = AT \frac{\partial p}{\partial T} dv,$$

d'où

$$Q = AT \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial p}{\partial T} dv.$$

On en déduit la formule

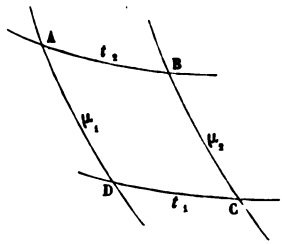
$$Q = AT \frac{dS}{dT}. \tag{14}$$

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE CARNOT.

76. Le théorème que Sadi Carnot a énoncé en 1824, et qui joue un si grand rôle dans la nouvelle théorie où l'on considère la chaleur comme un mouvement, provient cependant d'une idée théorique toute différente. Carnot, raisonnant dans l'hypothèse de la matérialité du calorique, assimilait la chaleur contenue dans un corps, à une certaine température, à un poids maintenu à un certain niveau. Pour lui, le passage de la chaleur du corps chaud au corps froid, dans le jeu d'une machine thermique, était un phénomène mécanique analogue à la chute d'un corps d'une certaine hauteur. Il admettait donc que toute la chaleur perdue par la source supérieure passait dans la source inférieure, en descendant d'un niveau à un autre; en

d'autres termes, il supposait $Q_2 = Q_1$. Dans cet ordre d'idées, le travail accompli par la chute de chaleur, dans une machine fonctionnant suivant le cycle ABCD, est le produit du poids Q_1 de chaleur par la différence de niveau, c'est-à-dire par la diffé-

Fig. 11.

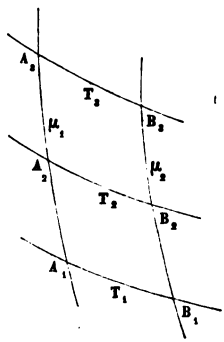


rence de température $t_2 - t_1$. Le rapport du travail accompli $Q_2(t_2 - t_1)$ au poids de chaleur Q_2 est égal à la différence de température $t_2 - t_1$. Pour un autre corps fonctionnant suivant un cycle compris entre les mêmes limites de température, ce rapport a évidemment la même valeur.

Dans la marche inverse de la machine, il faut dépenser un travail extérieur égal à $Q_1(t_2 - t_1)$ pour élever le poids Q_1 de chaleur du niveau t_1 au niveau t_2; le rapport du travail dépensé au poids de chaleur déplacé est encore constant.

Cette image de Carnot contient un grand fonds de vérité,

Fig. 12.



parce qu'elle assimile un phénomène thermique à un phénomène mécanique; mais elle est défectueuse en ce qu'elle

suppose que la quantité de chaleur reste constante dans le jeu de la machine. Comme nous l'avons vu, dans la marche directe, la quantité Q_2, puisée à la source supérieure, est plus grande que la quantité Q_1 transmise à la source inférieure; la différence $Q_2 - Q_1$ est changée en travail. Dans la marche inverse, au contraire, le travail dépensé crée de la chaleur.

Dans ces derniers temps, M. Zeuner a modifié l'image de Carnot de manière à la mettré d'accord avec l'idée nouvelle. Considérons les lignes isothermes A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,..., correspondant aux températures absolues T_1, T_2, T_3,..., et comprises entre deux lignes adiabatiques données μ_1 et μ_2. D'après l'équation (10), établie au n° 68, on a

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_3}{T_3} = \ldots$$

En désignant par $\frac{P}{E}$ la valeur de ces rapports égaux, on en déduit

$$EQ_1 = PT_1, \quad EQ_2 = PT_2, \quad EQ_3 = PT_3, \ldots.$$

Si l'on compare la quantité P à un poids, les quantités de chaleur Q_1, Q_2, Q_3,..., seront assimilées aux énergies potentielles de ce poids P placé à diverses hauteurs T_1, T_2, T_3,.... Dans le jeu de la machine suivant le cycle de Carnot $A_2B_2B_1A_1$, le poids P descendant du niveau T_2 au niveau T_1, il y a perte d'une quantité $PT_2 - PT_1 = E(Q_2 - Q_1)$ d'énergie potentielle ou de chaleur, et production d'une quantité égale de travail. Mais aujourd'hui ces comparaisons n'offrent plus aucun avantage; il vaut mieux s'en tenir à l'idée qui sert de base à la théorie nouvelle, savoir la transformation de l'énergie calorifique en travail, ou inversement.

CHAPITRE III.

MACHINES A FEU.

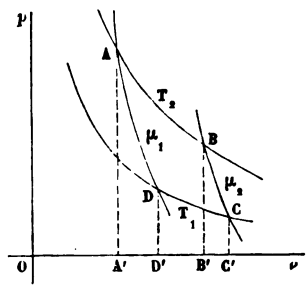
Principes généraux. — Machines à gaz. — Régénérateur de chaleur. — Machine de Stirling. — Machine d'Ericsson.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

77. Nous allons appliquer les formules qui précèdent à l'étude des machines à feu, destinées à transformer la chaleur en travail.

Considérons d'abord une machine à feu fonctionnant suivant un cycle de Carnot ABCD, et mise alternativement en communication avec une source de chaleur K_2 à la température T_2 et un réfrigérant K_1 à la température T_1. La machine prend à la source une quantité de chaleur Q_2 et verse sur le réfrigérant une quantité plus petite Q_1. La différence $Q_2 - Q_1$ a été transformée en un travail extérieur S, figuré par l'aire ABCD.

Fig. 13.



On a, d'après la première loi (n° 35),

$$S = E(Q_2 - Q_1).$$

On appelle *coefficient économique* ou *rendement* d'une ma-

hine à feu le rapport de la quantité de chaleur transformée n travail à la quantité de chaleur prise à la source; ce rapport est égal à

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}.$$

L'application de la seconde loi nous donne la valeur de ce apport. Nous avons trouvé, en effet (n° 68),

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

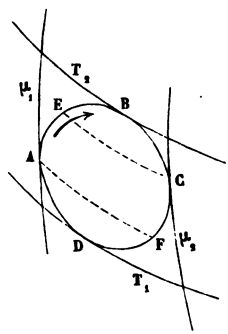
Ce rapport dépend uniquement des températures extrêmes, entre lesquelles fonctionne la machine. Dans la pratique, il faut chercher à augmenter ce rapport; pour cela on abaisse la température inférieure T_1 et on élève la température supérieure T_2, autant qu'il est possible. Supposons, par exemple, que la température supérieure soit de 300 degrés centigrades et la température inférieure de 15 degrés; la valeur du coefficient économique sera

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{t_2 - t_1}{a + t_2} = \frac{285}{273 + 300} = \frac{285}{573}, \text{ environ } \frac{1}{2}.$$

Ce serait là une condition très-avantageuse au point de vue du rendement; on ne l'a jamais réalisée.

78. Considérons maintenant une machine fonctionnant suivant un cycle quelconque ABCD (*fig.* 14); il est nécessaire

Fig. 14.



pour cela que la machine soit en communication alternative-

ment avec une source à température variable, à laquelle elle emprunte de la chaleur pendant une phase de la transformation, et avec un réfrigérant à température variable, auquel elle cède de la chaleur. Menons deux lignes isothermes T_1 et T_2 et deux lignes adiabatiques μ_1 et μ_2 tangentes à ce cycle, de manière à lui circonscrire un cycle de Carnot, et désignons par A, B, C, D les points de contact de ces quatre courbes avec le cycle proposé.

Tout le long de la ligne ABC, la machine absorbe de la chaleur; car la fonction μ va en croissant du point A au point C, et l'on a, pour une transformation infiniment petite,

$$dQ = T\,d\mu;$$

appelons Q_2 la quantité de chaleur absorbée dans cette portion du cycle. Suivant la courbe CDA, au contraire, la machine dégage de la chaleur; car la fonction μ diminuant, $d\mu$ et dQ sont tous deux négatifs; appelons Q_1 la quantité de chaleur dégagée dans cette partie du cycle.

La température va en croissant le long du chemin DAB, et en décroissant suivant BCD; menons les lignes isothermes AF et CE qui passent par les points A et C; on voit que la source, pendant la transformation AE, est à une température inférieure à celle du réfrigérant au point C.

Pour un cycle quelconque, on a (n° 68)

$$\int \frac{dQ}{T} = 0;$$

en mettant en évidence le signe de dQ, on écrira cette équation de la manière suivante :

$$(1) \qquad \int_{ABC} \frac{dQ}{T} - \int_{CDA} \frac{dQ}{T} = 0.$$

Le long de la courbe ABC, la température T du corps dont on suit les modifications est inférieure à la température maximum T_2, celle du point B; on a donc

$$\int_{ABC} \frac{dQ}{T} > \int \frac{dQ}{T},$$

ou bien, comme T_2 est constant,

$$\int_{ABC} \frac{dQ}{T} > \frac{Q_2}{T_2}.$$

Au contraire, le long de CDA, la température du corps est supérieure à la température minimum T_1, celle du point D, et l'on a

$$\int_{CDA} \frac{dQ}{T} < \int \frac{dQ}{T_1},$$

ou bien

$$\int_{CDA} \frac{dQ}{T} < \frac{Q_1}{T_1}.$$

On a donc, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} < 0,$$

ou

$$\frac{Q_1}{Q_2} > \frac{T_1}{T_2}.$$

On déduit de là

$$1 - \frac{Q_1}{Q_2} < 1 - \frac{T_1}{T_2},$$

ou

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

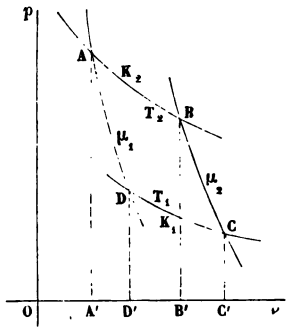
Le coefficient économique d'une machine fonctionnant suivant un cycle quelconque est donc plus petit que si la machine fonctionnait suivant un cycle de Carnot entre les températures extrêmes T_2 et T_1. Le mode de transformation le plus avantageux est donc le cycle de Carnot; il donne le coefficient économique maximum. Ce qui le caractérise, c'est que la source fournit de la chaleur à la machine à une température constante, et que le dégagement de chaleur dans le réfrigérant a lieu aussi à une température constante.

MACHINES A GAZ.

79. Dans une machine à gaz parfait on peut calculer complétement toutes les circonstances du phénomène, parce que l'on connaît les équations des lignes de transformation.

Considérons une machine à gaz fonctionnant suivant un cycle de Carnot ABCD (*fig.* 15), et désignons par v_1, v_2, v'_2, v'_1, les volumes spécifiques du gaz aux points A, B, C, D. Les

Fig. 15.



lignes isothermes sont ici des hyperboles équilatères (n° 59), et l'énergie intérieure ne change pas pendant une transformation à température constante (n° 45); toute la chaleur fournie par la source le long de la ligne AB est donc transformée en travail figuré par l'aire ABB'A'. Soit M le poids de gaz que renferme la machine, Q_2 la quantité de chaleur absorbée suivant AB, on a

$$Q_2 = MT_2(\mu_2 - \mu_1).$$

L'équation des lignes adiabatiques pour les gaz (n° 50) est

$$\mu = \log BT^c v^{C-c}.$$

On a donc ici, pour les deux points A et B,

$$\mu_2 - \mu_1 = (C - c)\log\frac{v_2}{v_1},$$

ce qui donne

$$Q_2 = MT_2(C - c)\log\frac{v_2}{v_1},$$

bien, en remplaçant $C - c$ par sa valeur $A\alpha p_0 v_0$ (n° 46),

$$Q_2 = MA\alpha p_0 v_0 T_2 \log \frac{v_2}{v_1}.$$

travail extérieur ABB'A' est

$$M\alpha p_0 v_0 T_2 \log \frac{v_2}{v_1}.$$

.e long de la ligne adiabatique BC, l'énergie intérieure di-
ıue et se transforme en travail BCC'B'. Cette perte d'éner-
correspond à l'abaissement de température $T_2 - T_1$; elle a
ır valeur (n° 51)

$$MEc(T_2 - T_1).$$

uivant la ligne isotherme CD, le gaz absorbe un travail
érieur CDD'C', son volume diminue et il dégage sur le
igérant une quantité Q_1 de chaleur donnée par l'équation

$$Q_1 = MA\alpha p_0 v_0 T_1 \log \frac{v'_2}{v'_1}.$$

Nous avons vu que, pour toute machine fonctionnant suivant
cycle de Carnot, on a

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1};$$

ır que cette relation soit satisfaite dans le cas actuel, il faut
e

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v'_2}{v'_1}.$$

Enfin, suivant la ligne adiabatique DA, le gaz reçoit un tra-
l extérieur DAA'D', et l'énergie intérieure augmente de la
antité

$$MEc(T_2 - T_1).$$

On voit par là que le travail extérieur effectué par la détente
gaz, suivant la ligne adiabatique BC, est égal au travail ex-
ieur dépensé pour faire fonctionner la machine pendant la
uxième période de compression DA. La quantité de chaleur
parue est

$$Q_2 - Q_1 = MA\alpha p_0 v_0 (T_2 - T_1) \log \frac{v_2}{v_1},$$

et le travail extérieur, figuré par l'aire du trapèze curviligne ABCD, est égal à

$$M\alpha p_0 v_0 (T_2 - T_1) \log \frac{v_2}{v_1}.$$

On peut, du reste, vérifier aisément cette conséquence en calculant directement le travail extérieur. En effet, le travail accompli suivant la ligne AB a pour expression

$$M \int_{v_1}^{v_2} p dv = M\alpha p_0 v_0 T_2 \log \frac{v_2}{v_1},$$

en vertu de la relation

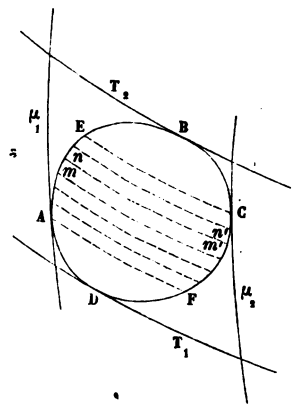
$$pv = \alpha p_0 v_0 T_2;$$

c'est la valeur que nous avons trouvée plus haut en nous servant de l'équation des lignes adiabatiques.

RÉGÉNÉRATEURS DE CHALEUR.

80. Supposons maintenant que la machine fonctionne suivant un cycle quelconque, entre les températures extrêmes T_2 et T_1, et circonscrivons à ce cycle un cycle de Carnot tangent aux points A, B, C, D (*fig.* 16). On sait (n° 78) que le coefficient

Fig. 16.



économique est plus petit que celui que donnerait un cycle de

Carnot compris entre les mêmes limites de température, et l'on a

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Comme le cycle de Carnot est difficile à réaliser dans la pratique, on a cherché à atteindre le rendement maximum par un moyen détourné, à l'aide des *régénérateurs* de chaleur.

Menons les lignes isothermes CE, AF qui passent par les points de contact C et A; imaginons l'arc AE divisé en un certain nombre d'éléments, et menons des lignes isothermes par les points de division; nous décomposerons ainsi l'arc CF en un même nombre d'éléments correspondants. Pour la transformation qui a lieu suivant l'élément mn, la source fournit au gaz une quantité dq_2 de chaleur à la température T, et, pour la transformation correspondante suivant l'élément $m'n'$, la machine dégage sur le réfrigérant une quantité dq_1 de chaleur. Comme ces deux quantités de chaleur sont à la même température, on peut concevoir un corps extérieur à la température T, qui recueille la chaleur dq_1 dégagée pendant la transformation $m'n'$, et qui la rende à la machine pour concourir à la transformation correspondante mn à la même température. Si les quantités de chaleur dq_1 et dq_2 sont égales, la chaleur dégagée suivant l'élément $m'n'$ suffira pour la transformation mn, et si les courbes CF et AE sont telles que cette condition soit réalisée pour tous les éléments correspondants, la chaleur dégagée pendant la transformation CF pourra servir à opérer la transformation AE sans aucune dépense de travail.

Ce corps étranger, qui conserve pour une phase de la transformation la chaleur dégagée dans une autre phase, est un *régénérateur de chaleur.*

81. De cette façon, le foyer ne fournira de la chaleur que suivant la ligne EBC, et la machine cédera de la chaleur au réfrigérant le long de la ligne FDA. L'addition du régénérateur de chaleur a diminué la dépense, mais le coefficient économique est encore plus petit que pour un cycle de Carnot. En

effet, on a, pour un cycle quelconque (n° 68), l'équation

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

En mettant en évidence les signes des différents termes de cette somme pour les portions du cycle considéré, on obtient

$$\int \frac{dQ}{T} = \int_{AE} \frac{dq_2}{T} + \int_{EBC} \frac{dQ_2}{T} - \int_{CF} \frac{dq_1}{T} - \int_{FDA} \frac{dQ_1}{T} = 0.$$

La température étant la même pour les éléments correspondants mn, $m'n'$ et les quantités de chaleur dq_1 et dq_2 étant supposées égales, on a

$$\int_{AE} \frac{dq_2}{T} = \int_{CF} \frac{dq_1}{T},$$

et l'équation devient

$$\int_{EBC} \frac{dQ_2}{T} - \int_{FDA} \frac{dQ_1}{T} = 0.$$

Or, le long de EBC, la température est inférieure à T_2; le long de FDA elle est supérieure à T_1; on a donc

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} < 0,$$

ou

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} < \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

82. On peut cependant modifier le cycle de manière à réaliser le coefficient économique maximum ; il suffit pour cela que la température soit constante sur la ligne EBC et aussi sur FDA, c'est-à-dire que ces deux lignes soient des lignes isothermes. Le problème est susceptible d'une infinité de solutions.

Formons, en effet, un cycle avec deux lignes isothermes quelconques BC et AD (*fig.* 17) aux températures T_2 et T_1, une ligne arbitraire AB, et terminons le cycle par une quatrième ligne CD telle que les quantités de chaleur absorbée et dégagée sur deux éléments correspondants des lignes AB et CD

soient égales. On a alors

$$0 = \int_{BC} \frac{dQ_2}{T} - \int_{DA} \frac{dQ_1}{T} = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1},$$

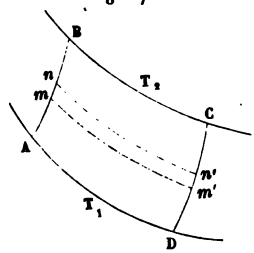
et, par suite,

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Un pareil cycle est aussi avantageux que le cycle de Carnot; mais il nécessite l'emploi d'un régénérateur de chaleur.

La ligne AB étant donnée, la ligne CD est déterminée par la

Fig. 17.



condition que l'on ait, pour deux éléments correspondants mn, $m'n'$, l'équation

$$dq_1 = dq_2.$$

Désignons par v et p les coordonnées du point m, par v' et p' celles du point m'; on a (n° 40)

$$dq_2 = M(c\,dt + l\,dv),$$

ou (n° 47)

$$dq_2 = M(c\,dt + A\,p\,dv).$$

La chaleur spécifique c étant indépendante du volume (n° 45) et la variation de température dt étant la même pour les deux éléments, on a aussi

$$dq_1 = M(c\,dt + A\,p'\,dv'),$$

et la condition cherchée devient

$$p\,dv = p'\,dv'.$$

Comme les points m et m' appartiennent à une ligne isotherme, on peut appliquer la loi de Mariotte $pv = p'v'$, ce qui

donne

$$\frac{dv}{v} = \frac{dv'}{v'};$$

d'où

$$v = hv',$$

et, par suite,

$$p = \frac{p'}{h},$$

h étant un nombre arbitraire.

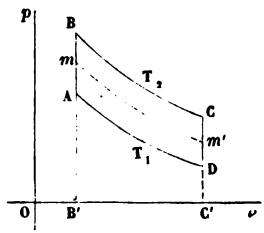
Ainsi, quand on connaît l'équation $\varphi(v, p) = 0$ de la ligne AB, il suffit d'y remplacer v et p par les valeurs précédentes pour obtenir l'équation de la ligne CD,

$$\varphi\left(hv', \frac{p'}{h}\right) = 0.$$

MACHINE DE STIRLING.

83. Dans la machine de Stirling, qui réalise les conditions précédentes, la ligne AB est une parallèle à l'axe Op (*fig.* 18 ;

Fig. 18.



elle a pour équation

$$v - v_1 = 0.$$

L'équation de la ligne CD sera donc

$$hv' - v_1 = 0,$$

ou

$$v' = \frac{v_1}{h} = v_2;$$

cette ligne est aussi une droite parallèle à Op.

Au reste, il est facile de voir directement que deux lignes parallèles à Op satisfont aux conditions du problème; car, dans

s, pour deux éléments m et m' situés entre deux lignes ermes, on a

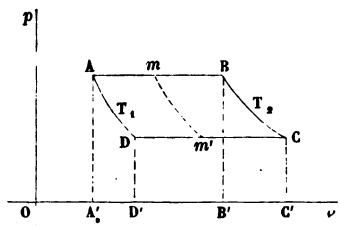
$$dq_2 = dq_1 = \mathrm{M}c\,dt.$$

cette machine, le foyer fournit de la chaleur au gaz suivant ne isotherme BC et cette chaleur se transforme en travail ·ieur. Suivant la ligne CD, le gaz se refroidit à volume tant, sans travail extérieur, et cède de la chaleur au régé- eur. Le long de la ligne isotherme DA, une portion du il produit suivant BC est employée à comprimer le gaz le ramener à son volume primitif; en même temps le gaz au réfrigérant une quantité de chaleur qui est perdue, ; qu'elle est à la température la plus basse de la machine. ı, suivant la ligne AB, le gaz est réchauffé à volume con- et ramené à la pression primitive à l'aide de la chaleur lui fournit le régénérateur.

MACHINE D'ÉRICSSON.

. Dans la première machine d'Ericsson, le problème est lu d'une manière peu différente. La ligne AB est une

Fig. 19.



le parallèle à l'axe Ov (*fig.* 19) et ayant pour équation

$$p - p_2 = 0.$$

gne CD, ayant pour équation

$$\frac{p'}{k} - p_2 = 0$$

$$p' = kp_2 = p_1,$$

ussi une droite parallèle à Ov. Le foyer fournit de la cha- le long de la ligne isotherme BC et le réfrigérant en ab-

sorbe le long de la ligne isotherme DA. La régénération de chaleur a lieu ici sous pression constante, tandis qu'elle s'effectue à volume constant dans la machine de Stirling.

Il est facile de voir directement qu'il y a compensation entre la chaleur reçue par le régénérateur le long de la ligne CD et celle qu'il rend au gaz suivant AB. On a en général (n° 41)

$$dq = \mathrm{M}(\mathrm{C}dt + h\,dp).$$

Pour une transformation sous pression constante, le terme $h\,dp$ est nul; le gain et la perte de chaleur suivant deux éléments correspondants m et m' des lignes AB et CD sont donc

$$dq_2 = dq_1 = \mathrm{MC}dt.$$

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DES VAPEURS.

Vapeurs saturées. — Transformation d'un mélange de liquide et de vapeur. — Équation de Clausius. — Équation de W. Thomson. — Densités des vapeurs saturées. — Chaleur spécifique de la vapeur saturée. — Condensation dans la détente de la vapeur d'eau. — Énergie intérieure d'un mélange de liquide et de vapeur. — Transformation d'un mélange de liquide et de vapeur suivant une ligne adiabatique. — Travail dans la détente.

VAPEURS SATURÉES.

85. Quand on diminue progressivement le volume d'une vapeur sèche, en la soumettant à une pression de plus en plus grande et la maintenant à une température constante, il existe une limite de pression que l'on ne peut dépasser. Dès que l'on arrive à cette pression maximum, la vapeur est dite *saturée;* si le volume continue à diminuer, une partie de la vapeur se transforme en liquide et la pression reste constante. Cette tension *maximum* de la vapeur, à une température donnée, dépend de la nature du corps; c'est une fonction de la température; nous la représenterons par

$$p = \mathrm{F}(t). \tag{1}$$

De même, de la vapeur étant soumise à une pression constante p, si l'on abaisse peu à peu la température, on arrive à une température limite au-dessous de laquelle on ne peut descendre. Dès que l'on arrive à cette température minimum, la vapeur est saturée; et si l'on continue à enlever de la chaleur, la vapeur se liquéfie en partie, et tant qu'il subsiste de la vapeur, la température reste constante. En imaginant l'équation (1) résolue par rapport à t, on obtient la température *minimum* de la vapeur sous pression donnée

$$t = \varphi(p). \tag{2}$$

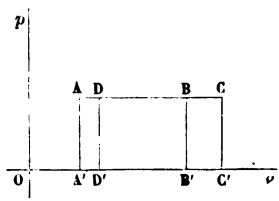
Les équations (1) et (2) donnent la tension de la vapeur saturée à la température t, ou inversement la température de la vapeur saturée sous la pression p.

86. Pendant que la vapeur se liquéfie, elle dégage de la chaleur; on appelle *chaleur latente de vaporisation* la quantité de chaleur L que dégage un kilogramme de vapeur saturée pour se liquéfier sous pression constante, et par conséquent à température constante; cette quantité de chaleur dépend de la nature du corps; c'est une fonction de la température à laquelle s'effectue le changement d'état.

87. Inversement, un liquide que l'on échauffe sous une pression constante p entre généralement en ébullition à la température t définie par l'équation (2); mais, tandis que la liquéfaction est un phénomène très-net qui a toujours lieu à la même température sous une pression donnée, le phénomène inverse, c'est-à dire la vaporisation, est beaucoup moins régulier. Ainsi, on a remarqué que, lorsque la masse liquide que l'on échauffe n'a pas de surface libre, on peut élever ce liquide sous la pression p à une température $t + \theta$, supérieure à la température constante t de la vapeur saturée. Si alors le liquide se vaporise, la chaleur latente L′ qu'il absorbera ne sera plus la même que celle qu'il absorbait dans l'ébullition normale.

Considérons en effet un liquide qui éprouve, sous la pression p, l'ébullition normale à la température t; son volume

Fig. 20.



augmente d'une manière considérable, et, comme la pression reste constante pendant toute la durée du phénomène, la transformation sera représentée par la droite AB parallèle à

l'axe Ov (*fig.* 20). Élevons maintenant cette vapeur à la température $t + \theta$, sous la même pression, le volume augmentera un peu, la vapeur sera *surchauffée* et cette nouvelle transformation sera représentée par la droite BC. Appelons C la chaleur spécifique du liquide sous pression constante et C′ la chaleur spécifique de la vapeur sous pression constante. L'ébullition normale AB exige une quantité de chaleur L; l'échauffement BC de la vapeur sous pression constante exige ensuite une quantité de chaleur $\int_t^{t+\theta} C' dt$. La quantité totale de chaleur absorbée par 1 kilogramme de liquide pour passer de l'état A à l'état C est donc

$$L + \int_t^{t+\theta} C' dt.$$

Supposons maintenant qu'on échauffe d'abord le liquide, sans le vaporiser, de la température t à la température $t + \theta$, sous la pression p; son volume augmentera un peu et le liquide passera de l'état A à l'état D. Le liquide éprouve ensuite l'ébullition retardée sous la pression p et arrive au même état final C. La quantité totale de chaleur absorbée dans cette seconde transformation a pour expression

$$\int_t^{t+\theta} C dt + L'.$$

Ces deux quantités de chaleur sont égales; car le travail extérieur ACC′A′ est le même pour les deux transformations, et la variation d'énergie intérieure est aussi la même, puisque l'état initial et l'état final sont identiques dans les deux cas. On a donc

$$L + \int_t^{t+\theta} C' dt = \int_t^{t+\theta} C dt + L',$$

d'où l'on déduit

$$L' = L - \int_t^{t+\theta} (C - C') dt.$$

Or l'expérience indique que la chaleur spécifique de tous

les liquides, au moins dans le voisinage du point d'ébullition, est plus grande que celle de leurs vapeurs; on a donc $C' < C$, et par suite $L' < L$. Pour l'eau, par exemple, on a

$$C = 1, \quad C' = 0{,}4805.$$

On conclut de là que, lorsqu'un liquide entre en ébullition sous une pression déterminée, la chaleur latente maximum est celle qui correspond à l'ébullition normale.

88. M. Regnault a déterminé par l'expérience la chaleur latente L de vaporisation pour quelques liquides à diverses températures, et il a représenté par des formules empiriques les résultats de ses expériences. Il a trouvé pour l'eau

$$L = 606{,}50 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3,$$

et pour l'éther

$$L = 94{,}00 - 0{,}07901\,t - 0{,}0008514\,t^2.$$

La chaleur latente produit un travail extérieur ABB'A' assez considérable, à cause du grand accroissement de volume; mais la plus grande partie est employée à l'augmentation d'énergie intérieure qu'éprouve le liquide pour se transformer en vapeur. Désignons, en effet, par u le volume spécifique du liquide à la température t, par u' le volume spécifique de la vapeur saturée à la même température, et supposons que la transformation ait lieu sous la pression constante p. Le travail extérieur est $p\,(u' - u)$, et l'on a

$$EL = \Delta U + p\,(u' - u),$$

d'où

$$A\,\Delta U = L - A\,p\,(u' - u).$$

Si l'on fait le calcul pour l'eau et l'éther, en supposant que la pression p soit de 760 millimètres, on obtient :

Pour l'eau,

$$A\,p\,(u' - u) = 31{,}10 + 0{,}0096\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3,$$

$$A\,\Delta U = 576{,}40 - 0{,}791\,t;$$

Pour l'éther,

$$A\,p\,(u' - u) = 7{,}46 + 0{,}02747\,t - 0{,}0001354\,t^2,$$

$$A\,\Delta U = 86{,}54 - 0{,}10648\,t - 0{,}0007160\,t^2.$$

TRANSFORMATION D'UN MÉLANGE DE LIQUIDE ET DE VAPEUR.

89. Considérons un mélange de liquide et de vapeur saturée ·mant un poids total de 1 kilogramme à la température t. it x le poids de la vapeur dans le mélange, $1-x$ celui du uide, u et u' les volumes spécifiques du liquide et de la peur et v le volume du mélange; on a

$$) \qquad v = u(1-x) + u'x = u + (u'-u)x.$$

Les quatre quantités u, u', p, L sont des fonctions de la mpérature seule; v est une fonction de t et de x; nous pouvons onc prendre t et x comme variables indépendantes. Considéons une transformation infiniment petite qui fasse passer le nélange de l'état (t, x) à l'état $(t+dt, x+dx)$. La chaleur écessaire pour opérer cette transformation est employée : • à échauffer un poids $1-x$ de liquide; 2° à échauffer un oids x de vapeur; 3° à vaporiser un poids dx de liquide. On donc

$$dQ = (1-x)(C\,dt + h\,dp) + x(C'\,dt + h'\,dp) + L\,dx.$$

l pression p de la vapeur saturée étant une fonction de la npérature seule, on peut remplacer dp par $\frac{dp}{dt}dt$ et mettre quation sous la forme

$$dQ = (1-x)\left(C + h\frac{dp}{dt}\right)dt + x\left(C' + h'\frac{dp}{dt}\right)dt + L\,dx.$$

sons, pour abréger,

$$m = C + h\frac{dp}{dt},$$

$$m' = C' + h'\frac{dp}{dt};$$

; quantités C, h, m, C', h', m' sont des fonctions de la temrature seule; car elles se rapportent à l'état de saturation i correspond à la température t. Le coefficient m' est ce 'on appelle *chaleur spécifique de la vapeur saturée sèche;*

en même temps qu'on élève la température, on augmente la pression, de manière que la vapeur reste saturée, mais sans condensation partielle. L'équation devient alors

$$dQ = [m(1-x) + m'x]\,dt + L\,dx,$$

ou

$$(4) \qquad dQ = [m + (m'-m)x]\,dt + L\,dx.$$

Si l'on remplace dv par sa valeur tirée de l'équation (3),

$$dv = \frac{du}{dt}dt + x\frac{d(u'-u)}{dt}dt + (u'-u)\,dx,$$

le travail extérieur accompli

$$dS = p\,dv$$

a pour expression

$$dS = p\left[\left(\frac{du}{dt} + x\frac{d(u'-u)}{dt}\right)dt + (u'-u)\,dx\right].$$

Enfin, de la première équation fondamentale

$$(a) \qquad dQ = A\,(dU + p\,dv),$$

on déduit la variation d'énergie intérieure

$$(5)\quad A\,dU = \left[m + (m'-m)x - Ap\frac{du}{dt} - Apx\frac{d(u'-u)}{dt}\right]dt + [L - Ap(u'-u)]\,dx.$$

ÉQUATION DE CLAUSIUS.

90. Nous suivrons la même marche qu'au n° 39. L'énergie intérieure U du mélange de liquide et de vapeur est une fonction déterminée des deux variables indépendantes t et x, qui définissent l'état du mélange. L'équation (5) donne la différentielle totale de cette fonction et par conséquent ses deux dérivées partielles du premier ordre. On a ainsi :

$$A\frac{\partial U}{\partial t} = m + (m'-m)x - Ap\frac{du}{dt} - Apx\frac{d(u'-u)}{dt},$$

$$A\frac{\partial U}{\partial x} = L - Ap(u'-u).$$

déduit

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x} = m' - m - Ap\frac{d(u'-u)}{dt},$$

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} = \frac{dL}{dt} - A(u'-u)\frac{dp}{dt} - Ap\frac{d(u'-u)}{dt}.$$

égalant ces deux valeurs on obtient la relation

$$\frac{dL}{dt} + m - m' = A(u'-u)\frac{dp}{dt}.$$

ÉQUATION DE W. THOMSON.

L'équation (4) donne aussi

$$\frac{dQ}{T} = \frac{m + (m'-m)x}{T}dT + \frac{L}{T}dx.$$

s, en vertu du second principe fondamental (n° 67),

$$\frac{dQ}{T} = d\mu,$$

ond membre de l'équation (6) est la différentielle exacte fonction μ des deux variables indépendantes T et x; il ulte la relation

$$\frac{d\left(\frac{L}{T}\right)}{dT} = \frac{m'-m}{T},$$

on peut mettre sous la forme

$$\frac{dL}{dT} = \frac{L}{T} + m' - m.$$

in la combinaison des deux équations (α) et (β_1) conduit oisième relation

$$\frac{L}{T} = A(u'-u)\frac{dp}{dT}.$$

Si dans l'équation (6) on remplace $m' - m$ par sa valeur

tirée de l'équation (β), on a

$$\frac{dQ}{T} = \frac{m}{T}\,dT + x\,d\left(\frac{L}{T}\right) + \frac{L}{T}\,dx,$$

ou

$$(7) \qquad d\mu = \frac{dQ}{T} = \frac{m}{T}\,dT + d\left(\frac{Lx}{T}\right).$$

La quantité m étant une fonction de la température seule, on reconnait que le second membre est bien une différentielle exacte; en intégrant on a

$$\mu = \frac{Lx}{T} + \int_{T_0}^{T} \frac{m}{T}\,dT.$$

Si l'on y regarde μ comme une constante, cette équation est celle des lignes adiabatiques,

Les équations précédentes conduisent à des conséquences importantes que nous allons successivement passer en revue.

DENSITÉS DES VAPEURS SATURÉES.

93. De l'équation (γ) on déduit

$$(8) \qquad u' - u = \frac{EL}{T\dfrac{dp}{dT}}.$$

La chaleur latente L et la tension p de la vapeur saturée sont des fonctions de la température qui ont été déterminées empiriquement par M. Regnault pour quelques liquides; l'équation (8) permet donc de calculer $u' - u$. D'ailleurs le volume spécifique u du liquide est sensiblement constant, on connaîtra donc aussi le volume spécifique u' de la vapeur et, par suite, sa densité. Voici les résultats calculés pour la vapeur d'eau par M. Clausius :

t	u' CALCULÉ.	u' OBSERVÉ.	u' CALCULÉ par la loi de Mariotte.
58°,21	8,23	8,27	8,38
92,66	2,11	2,15	2,18
117,17	0,947	0,941	0,991
144,74	0,437	0,432	0,466

Les valeurs de u' ont été déterminées expérimentalement ' MM. Fairbairn et Taite; on voit qu'elles s'accordent très- n avec celles qui ont été déduites de la théorie, et elles nt notablement plus faibles que celles que l'on obtient en pliquant la loi de Mariotte aux vapeurs comme on le faisait trefois.

94. Les deux quantités p et u' sont des fonctions de la tempé- ture, elles sont donc fonction l'une de l'autre, et M. Zeuner trouvé que la relation qui existe entre ces deux fonctions t représentée assez exactement par l'équation

$$pu'^n = b.$$

Pour la vapeur d'eau, les deux constantes n et b ont les va- urs suivantes

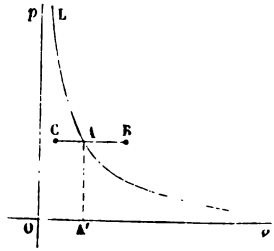
$$n = 1,0646,$$
$$b = 1,704.$$

En représentant cette équation par une courbe L (*fig.* 21), obtient une sorte d'hyperbole qui figure la ligne de trans- mation de la vapeur saturée.

Il est aisé de voir que tout point B situé à droite de la ne L indique un état de vapeur surchauffée, tandis qu'un int C situé à gauche indique une condensation partielle. En et, en A, sur la ligne L, la vapeur est saturée et sèche; sup- sons qu'en laissant la pression constante, on élève graduel- ment la température, le volume augmentera et la vapeur ten- a vers l'état de gaz parfait; le surchauffement de la vapeur us pression constante est figuré par la droite AB parallèle à xe ov. Au contraire, si l'on enlève de la chaleur, la pression

restant toujours constante, il y aura condensation partielle, et le volume diminuera peu à peu; la température restant con-

Fig. 21.



stante pendant cette transformation, la portion de droite AC, parallèle à l'axe *ov*, est une ligne isotherme pour le mélange de vapeur et de liquide.

CHALEUR SPÉCIFIQUE DE LA VAPEUR SATURÉE.

95. Nous venons de déterminer le volume spécifique u' de la vapeur saturée à l'aide de la tension et de la chaleur latente. La connaissance de la chaleur latente suffit pour déterminer la chaleur spécifique m' de la vapeur saturée. Nous nous servirons pour cela de l'équation (β) du n° **91**, qui donne la différence $m' - m$,

$$(9) \qquad m' - m = \mathrm{T}\frac{d\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}\right)}{d\mathrm{T}}.$$

On peut d'ailleurs sans erreur sensible remplacer le coefficient m par la chaleur spécifique C du liquide; car le coefficient h est très-petit pour les liquides, puisque leur compressibilité est très-faible; on aura ainsi m'.

On peut diviser les liquides en trois catégories : pour les uns la valeur de m' est négative; pour d'autres elle est positive; enfin il y a un troisième groupe de liquides pour lesquels la valeur de m' est négative au-dessous d'une certaine température et positive au-dessus.

L'équation générale

$$dQ = c\,dt + l\,dv,$$

.ne vapeur qui reste saturée et sèche, peut s'écrire

$$dQ = \left(c' + l' \frac{du'}{dT}\right) dT,$$

u'il n'y a plus alors qu'une seule variable indépendante en déduit

$$m' = c' + l' \frac{du'}{dT}.$$

quand la température s'élève, le volume spécifique de ›eur saturée diminue, la dérivée $\frac{du'}{dT}$ est donc négative; :ond membre de l'équation se compose ainsi de deux :s de signes contraires ayant des valeurs comparables; nçoit donc que la valeur de m' puisse être, suivant les positive ou négative. Voici les résultats calculés par ıusius :

	t	m'
Vapeur d'eau...	58°,21	—1,398
	92,66	—1,266
	117,17	—1,107
	144,74	—0,807
Sulfure de carbone....	0	—0,184
	80	—0,164
	160	—0,157
Vapeur d'éther	0	+0,116
	40	+0,120
	80	+0,128
	120	+0,133

voit d'après ce tableau que la vapeur d'eau et le sulfure :bone appartiennent à la première catégorie; la chaleur ìque de la vapeur saturée est négative et sa valeur ab- va en diminuant à mesure que la température s'élève. peur d'éther appartient à la seconde catégorie; la valeur est positive et va en augmentant avec la température.

La troisième catégorie comprend la benzine, le chloroforme, le chlorure de carbone. Dans tous les cas, la valeur relative de m' croît avec la température; on est donc conduit à penser que tous les liquides se comportent de la même manière, que la chaleur spécifique de la vapeur saturée est négative au-dessous d'une certaine température, à partir de laquelle elle devient positive et va constamment en croissant. Les nombres du tableau précédent semblent même indiquer que cette température limite n'est pas très-élevée pour la vapeur d'eau.

CONDENSATION DANS LA DÉTENTE DE LA VAPEUR D'EAU.

96. Le signe de m' a une grande importance dans l'étude des machines à vapeur. Supposons qu'une vapeur éprouve une transformation infiniment petite en restant saturée et sèche, la quantité de chaleur nécessaire à cette transformation sera

$$dQ = m'\,dt,$$

ou

$$dQ = m'\frac{dt}{du'}\,du' = \frac{m'}{\left(\frac{du'}{dt}\right)}\,du'.$$

Or la dérivée $\frac{du'}{dt}$ est toujours négative, la valeur de m' est aussi négative pour la vapeur d'eau, il en résulte que pour la vapeur d'eau dQ et du' ont le même signe.

Considérons donc 1 kilogramme de vapeur d'eau saturée et sèche occupant le volume u' à une certaine température t; comprimons-la et supposons qu'elle reste saturée et sèche; la variation du' est négative et par suite dQ est aussi négative, c'est-à-dire que la vapeur dégage de la chaleur. Mais si la compression est assez rapide pour que cette chaleur dégagée n'ait pas le temps de se répandre sur les corps extérieurs, elle échauffera la vapeur et la portera au-dessus de son point de saturation. Donc *la vapeur d'eau est surchauffée par la compression.*

Supposons, au contraire, que la vapeur saturée se dilate, du' et dQ sont tous deux positifs, c'est-à-dire qu'il y a absorption de chaleur. Ainsi, quand de la vapeur d'eau est saturée et sèche, si l'on veut augmenter son volume en la maintenant saturée et sèche, il faut lui fournir de la chaleur. Si la

dilatation est assez rapide pour que les corps extérieurs n'aient pas le temps de lui fournir la chaleur nécessaire, les choses se passeront comme si, la chaleur ayant été fournie pour maintenir la vapeur saturée et sèche sous le volume $u' + du'$, on enlevait ensuite cette chaleur, le volume restant le même et égal à $u' + du'$; il y aura évidemment condensation partielle. Donc *la vapeur d'eau se condense en partie pendant la détente.*

Pour la vapeur d'éther, m' ayant un signe différent, les phénomènes sont opposés; la compression produit une condensation partielle, et la dilatation surchauffe la vapeur.

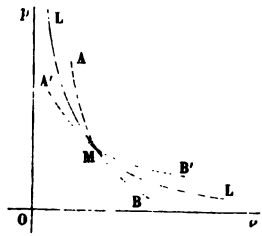
97. Cette condensation de la vapeur d'eau pendant la détente a été démontrée théoriquement à peu près à la même époque par M. Clausius et par M. Rankine. M. Hirn l'a vérifiée expérimentalement. Pour cela il introduit de la vapeur saturée bien sèche, et à une pression plus grande que la pression atmosphérique, dans un cylindre fermé par deux plaques de verre; le cylindre est alors parfaitement transparent. Quand on le met en communication avec l'atmosphère en ouvrant un robinet, il y a dilatation rapide, la vapeur se condense en partie et forme dans le cylindre un nuage opaque de gouttelettes liquides.

M. Hirn a réalisé aussi l'expérience inverse avec la vapeur d'éther. Il remplit de vapeur d'éther sèche et saturée un ballon communiquant avec un cylindre dans lequel peut se mouvoir un piston. Quand on pousse rapidement le piston dans le cylindre, la vapeur est comprimée, et il se forme un nuage indiquant une condensation partielle.

On peut représenter ces résultats géométriquement. Supposons que la courbe LL (*fig.* 22) soit la ligne de saturation de la vapeur d'eau; menons la ligne adiabatique AB; cette ligne coupera la ligne précédente comme l'indique la figure. En M la vapeur est saturée et sèche; si on la comprime sans dégagement ni absorption de chaleur, la vapeur, comme nous l'avons vu, se surchauffe; la portion de gauche MA de la ligne adiabatique est donc située au-dessus de L. Au contraire, si la vapeur se détend sans dégagement ni absorption

de chaleur, il y a condensation partielle, et par conséquent la partie MB de la ligne adiabatique est située au-dessous de L.

Fig. 22.



Pour la vapeur d'éther, la ligne adiabatique A'B' est disposée inversement.

98. On ne connaissait pas autrefois cette condensation de la vapeur d'eau dans les machines à détente et l'on était conduit à des résultats complétement erronés sur le rendement de ces machines. Supposons qu'un cylindre reçoive de la vapeur saturée et sèche et qu'on supprime la communication avec la chaudière quand le piston n'a parcouru qu'une partie de sa course, la vapeur se détend; une partie se condense et dégage, en se condensant, de la chaleur qui se transforme en travail. C'est là la source principale du travail dans ces machines.

Considérons, par exemple, une machine à haute pression dont la chaudière soit à 152 degrés et le condenseur à 40, et supposons la détente complète, c'est-à-dire telle, que la vapeur après la détente ait une tension égale à la tension maximum de la vapeur à 40 degrés. La quantité de chaleur nécessaire pour porter 1 kilogramme d'eau de zéro à t degrés et le vaporiser ensuite est

$$Q = Ct + L;$$

si l'on remplace L par la valeur donnée par M. Regnault (n° 88), on a approximativement

$$(10) \qquad Q = 606,50 + 0,305\,t.$$

Pour $t = 152°$, $Q = 653$; mais comme l'eau alimentaire est à 40 degrés, la dépense de chaleur pour chaque kilogramme

de vapeur est 613 calories. Si la vapeur n'éprouvait aucune condensation partielle pendant la détente et arrivait dans le condenseur à l'état de vapeur saturée sèche à 40 degrés, en se condensant à cette température elle abandonnerait 579 calories. La différence, soit 34 calories seulement, serait transformée en travail. Le coefficient économique ne serait donc que $\frac{34}{613}$, environ $\frac{1}{18}$.

Concevons maintenant que la machine fonctionne entre les mêmes limites de température 152 et 40 degrés, suivant un cycle de Carnot, on aura le coefficient économique

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{112}{273 + 152} = \frac{112}{425},$$

environ $\frac{1}{4}$. Ainsi le coefficient économique calculé d'après l'ancienne théorie est quatre fois trop faible. Ceci montre bien qu'une partie de la vapeur s'est condensée pendant la détente et que la chaleur dégagée par cette condensation partielle a été transformée en travail.

ÉNERGIE INTÉRIEURE D'UN MÉLANGE DE LIQUIDE ET DE VAPEUR.

99. Appelons U_0 l'énergie intérieure d'un kilogramme de liquide à la température T_0 sous la pression correspondante p_0. On échauffe ce liquide jusqu'à la température T, sous la pression variable p, en ayant soin qu'à chaque instant la pression supportée par le liquide soit égale à la tension maximum de la vapeur à la température correspondante. Supposons, en outre, qu'il ne se forme pas de vapeur, le liquide étant par exemple enfermé dans un cylindre dont le piston se déplace de manière à permettre seulement la dilatation du liquide. La chaleur nécessaire à cette transformation sera

$$\int_{T_0}^{T} m\,dt.$$

De la première équation fondamentale

$$E\int_{T_0}^{T} m\,dt = \Delta U + \int_{p_0}^{p} du,$$

on déduit

$$\Delta U = E\int_{T_0}^{T} m\,dt - \int_{p_0}^{p} p\,du.$$

Supposons qu'alors on volatilise un poids x de liquide, en laissant la température constante; la quantité de chaleur nécessaire pour cette volatilisation sera Lx, et, en appelant $\Delta' U$ la variation d'énergie intérieure correspondante, on aura

$$ELx = \Delta' U + p(u' - u)x,$$

d'où

$$\Delta' U = ELx - p(u' - u)x.$$

La variation d'énergie intérieure du mélange est évidemment égale à $\Delta U + \Delta' U$; on aura donc, en appelant U l'énergie intérieure de ce mélange,

$$U - U_0 = E\left(Lx + \int_{T_0}^{T} m\,dt\right) - p(u' - u)x - \int_{p_0}^{p} p\,du.$$

Le terme U_0 est une constante qui dépend de la nature du liquide.

Il est utile de modifier un peu cette expression pour en rendre les applications plus commodes. On a, en intégrant par parties,

$$\int_{p_0}^{p} p\,du = pu - p_0 u_0 - \int_{p_0}^{p} u\,dp.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, il vient

$$U - U_0 = E\left(Lx + \int_{T_0}^{T} m\,dt\right) - p[u + (u' - u)x] + p_0 u_0 + \int_{p_0}^{p} u\,dp,$$

ou bien, en remarquant que le volume v du mélange est égal à $u + (u' - u)x$,

$$(11) \qquad U - U_0 = E\left(Lx + \int_{T_0}^{T} m\,dT\right) - pv + p_0 u_0 + \int_{p_0}^{p} u\,dp.$$

La variation d'énergie intérieure entre deux états du mélange caractérisés par les indices 1 et 2 est donnée par l'équation

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} U_2 - U_1 &= E(L_2 x_2 - L_1 x_1) \\ &\quad - p_2 v_2 + p_1 v_1 + E\int_{T_1}^{T_2} m\,dT + \int_{p_1}^{p_2} u\,dp. \end{aligned}\right.$$

Dans la pratique, on peut se contenter d'une formule approchée plus simple. Nous avons vu que, pour les liquides, le coefficient m diffère très-peu de la chaleur spécifique sous pression constante C, parce que la compressibilité est très-faible. D'autre part, le volume spécifique u du liquide change peu. En remplaçant m par C et considérant u comme constant et égal à u_0, on aura, avec une approximation suffisante,

$$(13)\qquad U = U_0 + ELx + EC(T - T_0) - p(v - u),$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} U_2 - U_1 &= E(L_2 x_2 - L_1 x_1) + EC(T_2 - T_1) \\ &\quad - p_2 v_2 + p_1 v_1 + (p_2 - p_1)u. \end{aligned}\right.$$

TRANSFORMATION D'UN MÉLANGE DE LIQUIDE ET DE VAPEUR SUIVANT UNE LIGNE ADIABATIQUE. — TRAVAIL DANS LA DÉTENTE.

100. Nous avons trouvé (n° 92), pour une transformation quelconque d'un mélange de liquide et de vapeur, l'équation

$$(7)\qquad \frac{dQ}{T} = \frac{m}{T}\,dT + d\left(\frac{Lx}{T}\right).$$

Si le mélange n'a aucune communication de chaleur avec l'extérieur pendant la transformation, et par conséquent n'éprouve ni gain ni perte de chaleur, cette équation devient

$$0 = \frac{m}{T}\,dT + d\left(\frac{Lx}{T}\right),$$

ou

$$d\left(\frac{Lx}{T}\right) = -\frac{m}{T}\,dT.$$

On en déduit par l'intégration

$$(15)\qquad \frac{L_2 x_2}{T_2} - \frac{L_1 x_1}{T_1} = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T}\,dT,$$

x_1 et x_2 étant les poids de vapeur dans un kilogramme du mélange aux températures T_1 et T_2.

Si l'on connaît le titre x_1 du mélange à la température T_1, cette équation permettra de calculer le titre x_2 du mélange à une température quelconque T_2. On pourra ensuite déterminer le volume du mélange à l'aide de la formule

$$v = u + (u' - u)x.$$

Si l'on remplace x_2 par sa valeur tirée de l'équation (15), l'équation (12) devient

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} U_2 - U_1 = EL_1 x_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1} + E\int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_2}{T}\right) dT \\ - p_2 v_2 + p_1 v_1 + \int_{p_1}^{p_2} u\, dp. \end{aligned}\right.$$

101. Comme il n'y a ni perte ni gain de chaleur pendant cette transformation, le travail extérieur accompli S est égal à la perte d'énergie intérieure $U_1 - U_2$; on a donc

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} S = E(L_1 x_1 - L_2 x_2) \\ + p_2 v_2 - p_1 v_1 - E\int_{T_1}^{T_2} m\, dT - \int_{p_1}^{p_2} u\, dp. \end{aligned}\right.$$

M. Clausius a appliqué ces formules à la détente de la vapeur d'eau saturée, comme elle a lieu dans les machines à vapeur. Considérons, par exemple, de la vapeur d'eau saturée et sèche à la température de 150 degrés, et prenons pour unité de volume le volume occupé par un kilogramme de vapeur dans ces conditions; on a alors $t_1 = 150$, $x_1 = 1$, $v_1 = 1$. Le tableau suivant indique le poids de la vapeur qui reste, le volume du mélange et le travail extérieur accompli à différentes températures :

t	x	v	S	v'
125°	0,956	1,88	11 300kgm	1,93
100	0,911	3,90	23 200	4,16
75	0,866	9,23	35 900	10,11
50	0,821	25,7	49 300	29,7
25	0,776	88,7	63 900	107,1

Il se produit, comme on le voit, une condensation de plus en plus grande à mesure que la détente de la vapeur se prolonge. Nous remarquons que le volume du mélange est devenu vingt-six fois plus grand depuis la température de 150 degrés jusqu'à la température de 50 degrés : il est impossible de pousser la détente jusqu'à cette limite.

Si l'on calculait le volume v' de la vapeur en appliquant la loi de Mariotte, et supposant qu'il n'y ait pas de condensation, on trouverait des nombres trop grands; c'est ce que montre la dernière colonne du tableau.

CHAPITRE V.

MACHINES A VAPEUR.

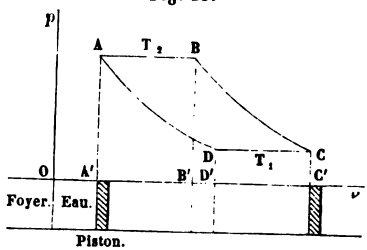
Machine idéale. — Machines réelles. — Détente incomplète. — Perfectionnements de la machine à vapeur : chemise à vapeur de Watt ; emploi de la vapeur surchauffée ; machines à deux liquides.

MACHINE IDÉALE.

102. Considérons d'abord une machine idéale fonctionnant suivant un cycle de Carnot, et qu'on peut se figurer de la manière suivante.

Un même cylindre remplirait à la fois le rôle de chaudière, de corps de pompe et de condenseur. Imaginons que dans le cylindre existe un poids M d'eau à la température T_2 et sous la

Fig. 23.



pression correspondante p_2; la chaleur fournie par le foyer transforme une partie de cette eau en vapeur à la température constante T_2; cette première phase de l'opération est représentée par une ligne isotherme AB, parallèle à l'axe Ov, puisque la tension de la vapeur est constante. On laisse ensuite la détente s'opérer suivant une ligne adiabatique BC, jusqu'à la température T_1. Pendant la troisième phase, on comprime le mélange à la température constante T_1, suivant la ligne isotherme CD, et l'on peut supposer que le cylindre est alors entouré

l'eau froide à la température T_1. Enfin on comprime de nouveau suivant la ligne adiabatique DA, de manière à ramener le mélange à son état primitif A.

Le long de la ligne isotherme AB, une portion Mx_2 du liquide s'est transformée en vapeur, et la source a fourni pour cela une quantité Q_2 de chaleur donnée par l'équation

$$Q_2 = L_2 M x_2 = ML_2 x_2.$$

De B en C, le mélange se détend sans gain ni perte de chaleur, et si l'on appelle x_1 la fraction de vapeur qui reste à l'état C, on aura, d'après l'équation (15) du n° 100,

$$(1) \qquad \frac{L_1 x_1}{T_1} = \frac{L_2 x_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT.$$

Cette équation permet de calculer x_1; on connaîtra donc l'état du mélange au point C.

Suivant la ligne isotherme CD, une nouvelle quantité de vapeur se condense à la température constante T_1, et si l'on appelle x' la fraction de vapeur qui reste au point D, la quantité de chaleur Q_1 dégagée sur le réfrigérant sera exprimée par l'équation

$$Q_1 = ML_1 (x_1 - x').$$

Quant à la valeur de x', elle sera déterminée par la condition que le mélange revienne du point D au point A, c'est-à-dire à l'état primitif, en suivant une ligne adiabatique. Il faut pour cela que l'on ait, en remarquant qu'au point A la valeur de x est nulle,

$$(2) \qquad \frac{L_1 x'}{T_1} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT.$$

La fraction x_2 de vapeur qui a été produite est donnée arbitrairement, et l'on peut calculer toutes les autres quantités en fonction de celle-là. En retranchant l'équation (2) de l'équation (1), on obtient

$$\frac{L_1 (x_1 - x')}{T_1} = \frac{L_2 x_2}{T_2}.$$

La valeur de Q_1 peut donc s'écrire

$$Q_1 = ML_2 x_2 \frac{T_1}{T_2}.$$

La quantité de chaleur convertie en travail est alors

$$Q_2 - Q_1 = ML_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

On voit d'abord que le coefficient économique a pour expression

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2},$$

ce qui devait être, puisque la machine fonctionne suivant un cycle de Carnot.

Le travail extérieur effectué par la machine est

$$S = MEL_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Tel est le travail effectué par un poids Mx_2 de vapeur. Pour un kilogramme de vapeur, le travail sera

$$(3) \qquad S = EL_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2};$$

c'est là le maximum de travail que puisse produire un kilogramme de vapeur entre des limites de température données.

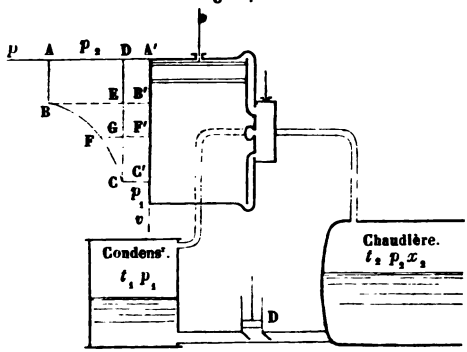
On n'a pas encore réalisé de machine à vapeur dont le jeu s'effectue suivant un cycle de Carnot. Nous allons étudier maintenant les machines réelles.

MACHINES RÉELLES.

103. Considérons d'abord une machine à double effet et à condensation, fonctionnant avec une chaudière à la température t_2 et un réfrigérant à la température t_1. Appelons x_2 le titre de la vapeur mélangée de gouttelettes liquides que fournit la chaudière, p_2 la pression correspondante et M le poids du mélange employé à chaque coup de piston. Ce mélange arrive à la partie supérieure du piston et agit à pleine

pendant une partie de la course A′B′; alors, par le jeu la communication du corps de pompe avec la chau-

Fig. 24.



interrompue, et la vapeur se détend pendant que le arche de B′ en C′. Nous supposerons la détente com- st-à-dire que la pression p_1 de la vapeur au point C, nité de la course, est égale à la tension maximum qui nd à la température t_1 du condenseur.

léterminer le travail produit par un coup de piston, narquerons que la face inférieure du piston est tou- communication avec l'atmosphère du condenseur et la pression p_1. Pendant la marche A′B′, la différence sions qui agissent sur les deux faces du piston est si v_2 est le volume spécifique du mélange, le volume ion A′B′ du corps de pompe est égal à Mv_2; le travail à pleine pression est donc

$$Mv_2(p_2 - p_1).$$

ions par x_1 le titre du mélange au point C et par v_1 me spécifique; le travail accompli pendant la détente onné par la formule (17) du n° 101; si l'on en re- e travail de la pression p_1 qui s'exerce sur la face in- du piston, on a pour ce travail

$$\left[E(L_2x_2 - L_1x_1) + p_1v_1 - p_2v_2 + E\int_{T_1}^{T_2} m\,dT + \int_{p_1}^{p_2} u\,dp - p_1(v_1 - v_2)\right].$$

Le titre initial x_2 de la vapeur étant donné, on déterminera x_1 par l'équation (15) du n° 100

$$\frac{L_1 x_1}{T_1} = \frac{L_2 x_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T} dT.$$

Le volume v_1 est aussi connu; car en appelant u'_1 le volume spécifique de la vapeur saturée sèche à la température T_1, on a

$$v_1 = u + (u'_1 - u) x_1.$$

Si l'on remplaçe x_1 par sa valeur, l'expression du travail pendant la détente devient

$$M\left[EL_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} - v_2 (p_2 - p_1) + E\int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT + \int_{p_1}^{p_2} u\,dp\right].$$

En y ajoutant le travail produit par la vapeur à pleine pression, on obtient le travail total

$$(4) \quad M\left[EL_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + E\int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT + \int_{p_1}^{p_2} u\,dp\right].$$

Il faut retrancher de cette somme le travail nécessaire pour le jeu de la pompe alimentaire D, qui, à chaque coup de piston, prend un poids M de liquide dans le condenseur à la température t_1 et à la pression p_1, et le porte dans la chaudière sous une pression plus élevée p_2. Désignons par H la pression atmosphérique, le travail nécessaire pour soulever le piston de cette pompe sera

$$M(H - p_1) u,$$

et, pour refouler le liquide dans la chaudière, il faudra encore dépenser un travail égal à

$$M(p_2 - H) u.$$

Le travail nécessaire au jeu de la pompe alimentaire est donc égal à

$$M(p_2 - p_1) u.$$

Comme le volume spécifique du liquide u change très-peu, on a sensiblement

$$M(p_2 - p_1)u = M\int_{p_1}^{p_2} u\,dp.$$

Par suite le travail disponible à chaque coup de piston sera en définitive

$$(5) \qquad S = ME\left[L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT\right].$$

104. On aurait pu obtenir ce travail, en évaluant la quantité de chaleur disparue pour chaque coup de piston. Le foyer fournit d'abord une quantité de chaleur égale à $MC(T_2 - T_1)$ pour porter l'eau de la chaudière de la température T_1 à la température T_2 sous la pression p_2; une fraction x_2 de ce liquide est ensuite transformée en vapeur à la même pression, ce qui exige une quantité de chaleur égale à $ML_2 x_2$. La chaleur totale Q_2 fournie par le foyer est donc

$$Q_2 = ML_2 x_2 + MC(T_2 - T_1).$$

Après la détente, le mélange est à la température T_1 et renferme un poids $M(1 - x_1)$ de liquide qui n'éprouve aucun changement, et un poids Mx_1 de vapeur qui se liquéfie dans le condenseur et dégage une quantité Q_1 de chaleur égale à $ML_1 x_1$. La quantité de chaleur transformée en travail est donc

$$Q_2 - Q_1 = M[L_2 x_2 - L_1 x_1 + C(T_2 - T_1)].$$

Nous avons vu déjà que pour les liquides on peut remplacer sans erreur sensible C par m, nous écrirons alors

$$C(T_2 - T_1) = \int_{T_1}^{T_2} m\,dT.$$

En substituant cette valeur dans l'équation précédente, et remplaçant x_1 par sa valeur, on a

$$Q_2 - Q_1 = M\left[L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT\right].$$

On retrouve ainsi la formule (5).

Dans cette machine, le coefficient économique a pour valeur

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{L_2 x_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m \left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT}{L_2 x_2 + \int_{T_1}^{T_2} m\, dT}.$$

et on peut le mettre sous la forme

$$\frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} - \frac{T_1 \int_{T_1}^{T_2} m \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_2}\right) dT}{L_2 x_2 + \int_{T_1}^{T_2} m\, dT}.$$

On voit que le coefficient économique est plus petit que si la machine fonctionnait suivant un cycle de Carnot; l'imperfection du jeu de la machine donne lieu à une perte de travail.

On voit encore qu'il y a avantage à employer de la vapeur sèche; car en faisant $x_2 = 1$, on diminue le second terme, et le coefficient économique se rapproche de la valeur maximum. Nous supposerons, dans tout ce qui suit, que la vapeur fournie par la chaudière est saturée, mais sèche.

105. Soit, par exemple, une machine dont la chaudière est à la température de 150 degrés et fournit de la vapeur sèche et dont le condenseur est à 50 degrés. Dans ces limites de température, le coefficient économique maximum est

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{100}{273 + 150} = 0,236.$$

Dans la machine que nous avons considérée, le travail produit par un kilogramme de vapeur sèche, d'après l'équation (5), est

$$(6') \qquad S = E\left[L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m \left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT\right].$$

En remplaçant m par la chaleur spécifique C que l'on suppose constante, on obtient une formule plus simple et suffisam-

ment approchée pour la pratique:

$$S = E\left[L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + C(T_2 - T_1) - CT_1 \log \frac{T_2}{T_1}\right] = 132\,E.$$

La quantité de chaleur fournie par le foyer est

$$Q_2 = C(T_2 - T_1) + L_2 = 602.$$

Le coefficient économique est $\frac{132}{602} = 0{,}219$. L'imperfection du cycle le diminue de 0,017.

DÉTENTE INCOMPLÈTE.

106. Dans ce qui précède, nous avons supposé la détente de la vapeur complète, depuis la température de 150 degrés de la chaudière, jusqu'à la température 50 degrés du condenseur, et, dans ces conditions, le volume final de la vapeur, comme nous l'avons vu (n° 101), serait vingt-six fois le volume primitif. Dans la pratique, on est loin d'utiliser toute la détente; le volume final de la vapeur ne dépasse guère quatre fois le volume primitif; il résulte de là une nouvelle perte de travail.

Supposons donc qu'on arrête la détente au point F (*fig.* 24), à la température T'; la vapeur, ayant alors une tension p' supérieure à p_1, se précipite dans le condenseur; la perte de travail est figurée par l'aire FCG; c'est la portion du travail de la détente qui n'est pas utilisée. Appelons v' le volume spécifique en F et x' le titre du mélange; d'après l'équation (17) du n° 101, le travail de la détente incomplète BF, diminué du travail de la pression p_1 qui s'exerce sur la face inférieure du piston, est

$$M\Big[E(L_2 x_2 - L' x') + p' v' - p_2 v_2 + E\int_{T'}^{T_2} m\,dT + \int_{p'}^{p_2} u\,dp - p_1(v' - v_2)\Big].$$

Si l'on remplace x' par sa valeur, donnée par l'équation

$$\frac{L' x'}{T'} = \frac{L_2 x_2}{T_2} + \int_{T'}^{T_2} \frac{m}{T}\,dT,$$

on a

$$M\left[EL_2 x_2 \frac{T_2 - T'}{T_2} + p'v' - p_2 v_2 + E\int_{T'}^{T_2} m\left(1 - \frac{T'}{T}\right) dT + \int_{p'}^{p_2} u\,dp - p_1(v' - v_2)\right].$$

En y ajoutant le travail à pleine pression et retranchant le travail nécessaire au jeu de la pompe alimentaire, on obtient le travail disponible

$$(7)\quad \left\{ M\left[EL_2 x_2 \frac{T_2 - T'}{T_2} + (p' - p_1)(v' - u) + E\int_{T'}^{T_2} m\left(1 - \frac{T'}{T}\right) dT\right]. \right.$$

La valeur approchée du travail disponible fourni par un kilogramme de vapeur sèche est donc

$$(8)\quad \left\{ S = E\left[L_2 \frac{T_2 - T'}{T_2} + A(p' - p_1)(v' - u) + C(T_2 - T') - CT' \log \frac{T_2}{T'}\right]. \right.$$

Supposons que, dans la machine que nous avons prise comme exemple, la détente cesse à la température de 100 degrés; le volume de la vapeur à la fin de la détente est environ quatre fois plus grand qu'au commencement; l'équation précédente donne $S = 99E$. La détente complète donnait $S = 132E$; la perte de travail due à l'imperfection de la détente est donc 33 E, c'est-à-dire un quart du travail total que l'on obtiendrait avec la détente complète.

PERFECTIONNEMENTS DE LA MACHINE A VAPEUR. — CHEMISE A VAPEUR DE WATT.

107. Watt a imaginé d'entourer le corps de pompe d'un deuxième cylindre dans lequel passent les gaz du foyer, après avoir échauffé la chaudière, et avant de se rendre dans la cheminée; ces gaz fournissent de la chaleur à la vapeur et empêchent la condensation qui a lieu habituellement endant

a détente. On évite ainsi la formation dans le corps de pompe le l'eau de condensation, qui gêne la marche du piston, et le endement est augmenté sans qu'il soit nécessaire d'augmen- er la dépense de combustible.

Supposons que les gaz du foyer maintiennent constamment la vapeur à l'état de vapeur saturée sèche, et calculons le travail disponible dans ces conditions.

Si l'on emploie un poids M de vapeur pour chaque coup de piston, il faudra d'abord une quantité de chaleur égale à $M\int_{T_1}^{T_2} C\,dT$ pour élever l'eau de la température T_1 à la température T_2, puis la quantité ML_2 pour la vaporisation à la température T_2, et enfin la quantité $\int_{T_2}^{T_1} m'\,dT$ pour maintenir la vapeur sèche de la température T_2 à la température T_1. La quantité totale de chaleur Q_2 fournie par le foyer est donc

$$Q_2 = M\left(\int_{T_1}^{T_2} C\,dT + L_2 + \int_{T_2}^{T_1} m'\,dT\right),$$

ou bien

$$Q_2 = M\left[\int_{T_1}^{T_2} C\,dT + L_2 + \int_{T_1}^{T_2} (-m')\,dT\right].$$

La vapeur arrive alors sèche au condenseur, et la quantité de chaleur qu'elle lui fournit est

$$Q_1 = ML_1.$$

La quantité de chaleur transformée en travail est donc

$$Q_2 - Q_1 = M\left[L_2 - L_1 + \int_{T_1}^{T_2} C\,dT + \int_{T_1}^{T_2} (-m')\,dT\right].$$

Si l'on remplace C par m, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le travail produit par un kilogramme de vapeur a pour valeur

$$S = E\left[L_2 - L_1 + \int_{T_1}^{T_2} (m - m')\,dT\right].$$

On peut simplifier cette expression à l'aide de l'équation (β_1)

de M. W. Thomson (n° 91),

$$m - m' = -\frac{dL}{dT} + \frac{L}{T};$$

on en déduit

$$\int_{T_1}^{T_2} (m - m')\,dT = -(L_2 - L_1) + \int_{T_1}^{T_2} \frac{L}{T}\,dT,$$

et, par suite,

$$(9) \qquad S = E\int_{T_1}^{T_2} \frac{L}{T}\,dT.$$

On a, d'après les expériences de M. Regnault,

$$L = 606{,}50 - 0{,}695\,t = 796{,}25 - 0{,}695\,T,$$

d'où

$$\frac{L}{T} = \frac{796{,}25}{T} - 0{,}695,$$

et, en remplaçant dans la formule (9),

$$(10) \qquad S = E\left[796{,}25 \log\frac{T_2}{T_1} - 0{,}695\,(T_2 - T_1)\right].$$

Si l'on applique cette formule à une machine fonctionnant avec une chaudière à 150 degrés et un condenseur à 50 degrés, on trouve $S = 144E$. La machine ordinaire, fonctionnant entre les mêmes limites de température (n° 105), donne 132E; le bénéfice est 12E. Avec cette modification de Watt, le foyer fournit sans doute à la vapeur une plus grande quantité de chaleur; mais avec la même dépense de combustible, le travail a été augmenté de $\frac{1}{11}$ de sa valeur, et le corps de pompe a été débarrassé de l'eau de condensation.

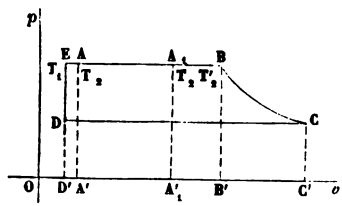
EMPLOI DE LA VAPEUR SURCHAUFFÉE.

108. Dans les machines qui précèdent, nous avons supposé que la vapeur était toujours saturée, en arrivant dans le corps de pompe et pendant la détente. Pour augmenter le coefficient économique, il faudrait porter la chaudière à une très-haute température; mais la tension de la vapeur d'eau croît si rapi-

dement quand la température s'élève, que l'on est bientôt arrêté par le défaut de résistance des chaudières. On évite cette difficulté en employant de la vapeur surchauffée; on peut alors élever la température sans augmenter outre mesure la tension de la vapeur. La vapeur, en sortant de la première chaudière, passe dans une deuxieme chaudière, où elle est échauffée par les gaz qui ont déjà servi à chauffer la première chaudière; la pression de la vapeur ne change pas parce que les deux chaudières restent constamment en communication, et il n'en résulte aucune nouvelle dépense de combustible. Cette vapeur surchauffée se rend dans le corps de pompe où elle travaille d'abord à pleine pression, puis se détend et se rend au condenseur.

Soit E (*fig.* 25) l'état de l'eau qui arrive dans la première chaudière à la température T_1 du condenseur et sous la pres-

Fig. 25.



sion p_2; elle est d'abord échauffée tout en restant liquide jusqu'à la température T_2 et passe à l'état A en changeant très-peu de volume; alors elle se transforme en vapeur saturée sèche à la même pression p_2 et arrive à l'état A_1. Ensuite la vapeur passe dans la deuxième chaudière où les gaz du foyer l'échauffent sous pression constante jusqu'à la température T'_2, et l'amènent à l'état B. La quantité Q_2 de chaleur fournie par le foyer pendant ces trois transformations est

$$Q_2 = M\left[\int_{T_1}^{T_2} C\,dT + L_2 + \int_{T_2}^{T'_2} C'\,dT\right].$$

Enfin la vapeur se rend dans le corps de pompe, travaille, et se détend de la pression p_2 à la pression p_1 du condenseur suivant la ligne adiabatique BC. Quoique d'abord surchauffée,

la vapeur devient bientôt saturée pendant la détente; elle se condense ensuite partiellement, et se trouve au titre x_1 quand elle arrive au condenseur, où elle se liquéfie. L'eau est alors à l'état D, et le jeu de la pompe alimentaire, qui la porte dans la chaudière, l'amène à l'état primitif E sous la pression p_2, suivant une ligne adiabatique DE qui est sensiblement une droite parallèle à *op*, puisque le changement de volume est très-faible.

La quantité de chaleur dégagée sur le condenseur est

$$Q_1 = ML_1 x_1,$$

et la chaleur transformée en travail

$$Q_2 - Q_1 = M\left[L_2 - L_1 x_1 + \int_{T_1}^{T_2} C\,dT + \int_{T_2}^{T'_2} C'\,dT\right].$$

Pour déterminer le titre final x_1 de la vapeur, nous appliquerons l'équation

$$\int \frac{dQ}{T} = 0,$$

vraie pour tout cycle fermé (n° 68). Dans le cas actuel cette équation devient

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{C}{T}\,dT + \frac{L_2}{T_2} + \int_{T_2}^{T'_2} \frac{C'}{T}\,dT + 0 - \frac{L_1 x_1}{T_1} + 0 = 0.$$

On en déduit

$$\frac{L_1 x_1}{T_1} = \frac{L_2}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{C}{T}\,dT + \int_{T_2}^{T'_2} \frac{C'}{T}\,dT.$$

En portant cette valeur de x_1 dans l'expression de la chaleur transformée en travail, il vient

$$Q_2 - Q_1 = M\left[L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} C\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT + \int_{T_2}^{T'_2} C'\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)dT\right].$$

Le travail produit par un kilogramme de vapeur est donc

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} S = E\Bigg[L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} \\ + \int_{T_1}^{T_2} C\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT + \int_{T_2}^{T'_2} C'\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Dans la machine ordinaire nous avons trouvé (n° 105)

$$S_0 = E\left[L_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) dT \right].$$

En remarquant que m est à peu près égal à C, on voit que dans la machine à vapeur surchauffée il y a un bénéfice de travail égal à

$$(12)\qquad S - S_0 = E\int_{T_2}^{T'_2} C'\left(1 - \frac{T_1}{T} dT\right).$$

Supposons que, la première chaudière étant à 150 degrés et le condenseur à 50 degrés, comme précédemment, la vapeur soit surchauffée jusqu'à 300 degrés et que la détente soit complète. La chaleur spécifique C′ de la vapeur surchauffée est encore mal connue; nous la supposerons constante et égale à 0,4805. On trouve alors $x_1 = 0,771$, $S - S_0 = 23E$, d'où l'on déduit $S = 155E$. On voit que, sans dépense nouvelle de combustible, le rendement de la machine est augmenté du sixième de sa valeur. Aussi l'emploi de la vapeur surchauffée est-il l'un des perfectionnements les plus importants qui aient été apportés à la machine à vapeur.

MACHINES A DEUX LIQUIDES.

109. Il est important, comme nous l'avons vu, pour le rendement de la machine, que les deux températures T_2 et T_1, entre lesquelles elle fonctionne, soient, l'une aussi élevée, l'autre aussi basse que possible, et que la vapeur opère sa détente complète de l'une à l'autre. Mais cette dernière condition exigerait que la machine eût des dimensions impossibles à réaliser. On a essayé de résoudre la difficulté en employant

deux liquides très-inégalement volatils, par exemple l'eau et l'éther. La machine est double; la vapeur d'eau produite dans la chaudière par la chaleur du foyer à la température T_2 se rend dans un condenseur, qui est à une température T' intermédiaire entre T_2 et T_1; la chaleur dégagée dans ce condenseur sert ensuite à vaporiser l'éther; la vapeur d'éther, produite à la température T', pousse un second piston et se rend dans un second condenseur à la température T_1. Le premier condenseur joue le rôle de foyer pour la machine à éther. Or on peut choisir la température intermédiaire T' de manière à rendre possible la détente complète de la vapeur d'eau entre les températures T_2 et T' et celle de la vapeur d'éther de T' à T_1.

Au point de vue théorique, une machine à deux liquides se comporte exactement comme une machine à un seul liquide fonctionnant entre les mêmes limites de température T_2 et T_1.

Supposons les machines parfaites, c'est-à-dire fonctionnant suivant des cycles de Carnot. Dans la première machine, fonctionnant entre les températures T_2 et T', le foyer fournit une quantité de chaleur Q_2, dont une partie

$$Q_2 \frac{T_2 - T'}{T_2}$$

est transformée en travail; l'autre partie

$$Q_2 \frac{T'}{T_2} = Q'$$

se dégage dans le premier condenseur et sert de foyer à la seconde machine. Cette nouvelle quantité de chaleur Q' se divise en deux parties; l'une

$$Q' \frac{T' - T_1}{T'}$$

est transformée en travail, l'autre

$$Q' \frac{T_1}{T'}$$

se dégage dans le deuxième condenseur et est définitivement perdue.

La quantité totale de chaleur transformée en travail est donc

$$Q_2 \frac{T_2 - T'}{T_2} + Q' \frac{T' - T_1}{T'} = Q_2 \frac{T_2 - T'}{T_2} + Q_2 \frac{T' - T_1}{T_2} = Q_2 \frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

La chaleur perdue est

$$Q' \frac{T_1}{T'} = Q_2 \frac{T_1}{T_2}.$$

Les résultats sont exactement les mêmes que si l'on avait employé une machine unique fonctionnant suivant un cycle de Carnot entre les deux températures extrêmes T_2 et T_1 des deux machines accouplées.

CHAPITRE VI.

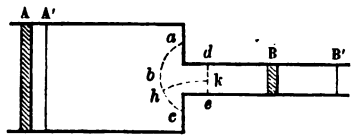
ÉCOULEMENT DES FLUIDES.

Principes généraux. — Écoulement d'un liquide; — d'un gaz parfait. — Écoulement des vapeurs. — Injecteur Giffard.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

110. Imaginons deux cylindres communiquant ensemble, la section du premier cylindre étant très-grande par rapport à celle du second (*fig.* 26). Supposons que deux pistons A et B

Fig. 26.



se meuvent dans ces deux cylindres, et qu'une certaine masse de fluide soit enfermée entre eux. Il y aura écoulement du grand cylindre vers le petit, si la pression p_1, exercée sur le fluide par le piston A, est supérieure à la pression p_2 qu'exerce le piston B. Appelons v_1 le volume spécifique du fluide dans le grand cylindre et T_1 sa température, à une assez grande distance de l'ouverture; v_2 et T_2 le volume spécifique et la température dans le petit cylindre. Soient encore w_1 et w_2 les vitesses de translation du fluide dans les deux cylindres, et considérons l'état des choses lorsque l'écoulement est devenu régulier.

Appliquons à la masse totale de fluide en mouvement le théorème des forces vives. Au temps t, cette masse occupe le volume AB; au temps $t+dt$, le piston A étant venu en A', le piston B en B', la masse fluide occupe le volume A'B'. Écrivons que la variation d'énergie totale est égale à la somme des travaux des forces extérieures (n° 26). Si l'on compare la masse fluide dans ses deux positions AB, A'B', on re-

marque que les parties qui occupent dans les deux cas le volume A'B sont dans le même état et par conséquent ont la même énergie; la variation de l'énergie est donc la différence entre l'énergie de la masse BB' et celle de la masse AA'. Appelons $d\varpi$ les poids des masses égales AA', BB'; désignons par U_1 l'énergie intérieure de l'unité de poids de fluide à la température T_1 et sous la pression p_1, par U_2 celle qui se rapporte à la température T_2 et à la pression p_2. L'énergie totale de la masse AA' sera exprimée par $d\varpi\left(\frac{w_1^2}{2g}+U_1\right)$, celle de la masse BB' par $d\varpi\left(\frac{w_2^2}{2g}+U_2\right)$; la variation d'énergie de la masse totale de fluide en mouvement est donc

$$d\varpi\left(\frac{w_2^2}{2g}+U_2\right)-d\varpi\left(\frac{w_1^2}{2g}+U_1\right).$$

D'autre part, le travail des pressions est $p_1 v_1 d\varpi - p_2 v_2 d\varpi$. L'équation des forces vives devient ainsi

$$d\varpi\left(\frac{w_2^2-w_1^2}{2g}+U_2-U_1\right)=p_1 v_1 d\varpi - p_2 v_2 d\varpi,$$

d'où l'on tire

$$(1)\qquad \frac{w_2^2-w_1^2}{2g}=p_1 v_1 - p_2 v_2 - (U_2-U_1).$$

Cette équation suppose qu'il n'y a pas eu de communication calorifique avec l'extérieur.

111. Le changement d'état du fluide s'opère entre une certaine surface courbe *abc* située dans le grand cylindre et une surface plane *de* dans le petit cylindre; une molécule du fluide suit une ligne telle que *hk*, normale à ces deux surfaces. Considérons donc une masse infiniment petite *m* de fluide, se mouvant suivant la ligne *hk*; la pression extérieure qui s'exerce sur cette masse *m* n'est pas la même tout autour; elle est plus grande à gauche qu'à droite : c'est là ce qui produit l'accroissement de son énergie sensible $\frac{mw^2}{2}$. Étudions main-

tenant le mouvement intérieur de la masse m, c'est-à-dire son mouvement relatif à son centre de gravité; nous savons que le théorème des forces vives s'applique au mouvement relatif au centre de gravité. Si la pression extérieure qui s'exerce sur la surface de la masse m était uniforme, le travail de cette pression dans le mouvement relatif serait $-mgpdv$; cette pression n'est pas uniforme, mais la différence qui en résulte est une quantité petite d'ordre supérieur et par conséquent négligeable. Si donc on désigne par $mg\,dQ$ la quantité de chaleur que reçoit la masse m dans le temps dt, le théorème des forces vives appliqué au mouvement intérieur de cette petite masse (n° 28) donnera l'équation

$$mg\,dU = mg\,E\,dQ - mgp\,dv,$$

ou

$$(a) \qquad dQ = A(dU + p\,dv).$$

C'est la première équation fondamentale (n° 38). Nous admettrons que la même relation $\varphi(T, v, p) = 0$, entre les trois quantités qui caractérisent l'état intérieur de la masse m, subsiste, que cette masse ait ou n'ait pas de mouvement sensible. Il est évident que la seconde équation fondamentale (n° 67)

$$(b) \qquad \frac{dQ}{T} = d\mu$$

subsistera également, μ étant une même fonction de deux variables indépendantes. Il en résulte que toutes les conséquences que nous avons déduites de ces deux équations fondamentales s'appliqueront à la transformation intérieure de la masse m, comme si cette masse n'avait pas de mouvement sensible.

Dans le cas actuel, nous supposons que le passage de la masse m du point h au point k s'opère dans un temps assez court pour qu'il n'y ait aucun échange de chaleur entre cette masse m et la masse environnante; dQ étant nulle, l'équation (a) se réduit à

$$dU + p\,dv = 0.$$

On en déduit, en intégrant du point h au point k,

$$(2) \qquad U_2 - U_1 = -\int_{v_1}^{v_2} p\,dv,$$

et, en remplaçant $U_2 - U_1$ par sa valeur dans l'équation (1),

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} p\,dv.$$

Si l'on intégre le dernier terme par parties, cette équation se simplifie et devient

$$(3) \qquad \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = -\int_{p_1}^{p_2} v\,dp = \int_{p_2}^{p_1} v\,dp.$$

Le volume v, qui entre sous l'intégrale, est une fonction de la pression p, donnée par cette condition que la transformation du fluide s'opère suivant une ligne adiabatique, c'est-à-dire sans communication calorifique avec l'extérieur.

ÉCOULEMENT D'UN LIQUIDE.

112. Appliquons ces résultats à l'écoulement d'un liquide regardé comme incompressible; le volume v est alors constant, et l'équation (3) devient

$$(4) \qquad \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = (p_1 - p_2)\,v.$$

Supposons que la section du cylindre soit très-grande par rapport à celle du tube d'écoulement, la vitesse w_1 sera très-petite et négligeable, ce qui réduit l'équation à

$$(5) \qquad \frac{w_2^2}{2g} = (p_1 - p_2)\,v.$$

On arrive ainsi à une formule bien connue d'hydrodynamique qui renferme la loi de Torricelli sur l'écoulement des liquides.

ÉCOULEMENT D'UN GAZ PARFAIT.

113. Pour étudier l'écoulement d'un gaz, il sera plus commode d'employer l'équation (1), parce que l'on connaît la va-

leur de l'énergie intérieure. On a, en effet, pour les gaz (n° 51),

$$U_2 - U_1 = Ec(T_2 - T_1),$$

$$p_1 v_1 = \alpha p_0 v_0 T_1,$$

$$p_2 v_2 = \alpha p_0 v_0 T_2.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = (\alpha p_0 v_0 + Ec)(T_1 - T_2).$$

On a d'ailleurs (n° 46)

$$\alpha p_0 v_0 = E(C - c);$$

on en déduit

$$(6) \qquad \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = EC(T_1 - T_2).$$

On ne connaît pas ordinairement la température T_2 dans le tube d'écoulement, mais on peut la calculer en fonction de la pression p_2 qui est connue. On a, pour un gaz parfait (n° 50), l'équation générale

$$p^c v^C = e^\mu.$$

Comme la transformation du gaz a lieu dans le cas actuel suivant une ligne adiabatique, la valeur de μ est constante, et l'on peut écrire

$$p_1^c v_1^C = p_2^c v_2^C.$$

On a aussi

$$\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} = \frac{T_1}{T_2};$$

de ces deux relations on déduit

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{C}{c} - 1} = \frac{T_2}{T_1}$$

et

$$(7) \qquad \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{C-c}{C}} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Cette équation (7) fera connaître la valeur de T_2; en substituant cette valeur dans l'équation (6) on aura la vitesse d'écoulement w_2.

Lorsque la vitesse w_1 est négligeable, l'équation (6) se réduit à

$$\frac{w_2^2}{2g} = EC(T_1 - T_2). \tag{8}$$

114. *Application numérique.* — Appliquons cette formule à l'écoulement d'une masse d'air qui sort d'un vase où la température est de 30 degrés et la pression d'une atmosphère et demie, et qui se rend dans l'atmosphère. On a alors

$$t_1 = 30^\circ,\ p_1 = \frac{3}{2}\text{atm.},\ p_2 = 1\text{ atm.}$$

$$C = 0{,}2375,\ c = 0{,}1684,\ C - c = 0{,}0791.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (7), il vient

$$T_2 = 303^\circ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{791}{2375}} = 269^\circ,$$

ou

$$t_2 = -4^\circ.$$

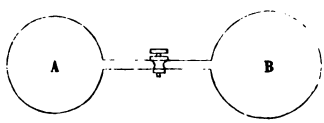
La formule (8) donne alors

$$w_2 = 258^m.$$

On voit que dans ces conditions l'écoulement du gaz est accompagné d'un grand abaissement de température et qu'il a lieu avec une vitesse considérable, 258 mètres par seconde.

115. Considérons encore deux vases A et B (*fig.* 27) communiquant à l'aide d'un tube fermé par un robinet, et remplis

Fig. 27.



l'un même gaz dans des conditions différentes, et étudions e phénomène qui se produit quand on ouvre le robinet qui es sépare.

Appelons V_1 le volume du ballon A, M_1 le poids de gaz ıu'il renferme d'abord, v_1 le volume spécifique de ce gaz,

p_1 sa pression, T_1 sa température; appelons V_2, M_2, v_2, p_2, les mêmes quantités relatives au ballon B.

Supposons $p_1 > p_2$ et considérons l'état des choses au moment où un poids M de gaz s'est écoulé du vase A dans le vase B. Le poids du gaz renfermé dans le ballon A est alors $M_1 - M$, et son état est caractérisé par les valeurs v'_1, p'_1, T'_1; le ballon B renferme un poids $M_2 + M$ de gaz dont l'état est caractérisé par les valeurs v'_2, p'_2, T'_2. Toutes ces valeurs nouvelles sont des fonctions du poids M de gaz écoulé; il s'agit de les déterminer.

Le poids $M_1 - M$ de gaz n'occupait d'abord qu'une partie du ballon A; ce gaz s'est ensuite dilaté de manière à occuper le volume tout entier V_1, sans communication de chaleur avec l'extérieur. On a donc, pour la transformation de cette masse de gaz, qui s'effectue suivant une ligne adiabatique, l'équation

$$p'^{c}_1 v'^{C}_1 = p^{c}_1 v^{C}_1,$$

$$\frac{p'_1}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^{\frac{C}{c}}.$$

Le rapport $\frac{v_1}{v'_1}$ est connu; car on a

$$v_1 = \frac{V_1}{M_1}, \quad v'_1 = \frac{V_1}{M_1 - M}.$$

d'où

$$\frac{v_1}{v'_1} = \frac{M_1 - M}{M_1},$$

et, par suite,

$$(9) \qquad \frac{p'_1}{p_1} = \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}:$$

cette équation donne la pression p'_1 dans le ballon A.

Pour déterminer la température T'_1, nous remarquerons qu'on a encore, pour la même transformation,

$$\frac{T'_1}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v'_1}\right)^{\frac{C-c}{c}},$$

l'où

10) $$\frac{T'_1}{T_1} = \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C-c}{c}}.$$

Les équations (9) et (10) déterminent complétement l'état du gaz dans le premier ballon.

Dans le second ballon B, il y a un poids $M_2 + M$ de gaz formant un mélange homogène. L'énergie totale de la masse entière de gaz renfermée dans les deux ballons n'a pas changé pendant l'opération, puisqu'il n'y a pas eu de travail extérieur accompli; cette condition permettra de déterminer l'état du gaz dans le ballon B. On a en général, pour l'unité de poids d'un gaz (n° 51),

$$U = U_0 + EcT.$$

En écrivant que l'énergie totale est la même au commencement et à la fin de l'opération, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} &M_1(U_0 + EcT_1) + M_2(U_0 + EcT_2) \\ &= (M_1 - M)(U_0 + EcT'_1) + (M_2 + M)(U_0 + EcT'_2), \end{aligned}$$

ou bien

$$M_1 T_1 + M_2 T_2 = (M_1 - M) T'_1 + (M_2 + M) T'_2.$$

Si l'on remplace T'_1 par sa valeur tirée de l'équation (10), on en déduit

11) $$T'_2 = \frac{M_2 T_2}{M_2 + M} + \frac{M_1 T_1}{M_2 + M}\left[1 - \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right].$$

Pour calculer la valeur de p'_2, nous nous servirons de l'équation

$$\frac{p'_2 v'_2}{p_2 v_2} = \frac{T'_2}{T_2},$$

ou

$$\frac{p'_2}{p_2} = \frac{T'_2}{T_2}\frac{v_2}{v'_2}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{v_2}{v'_2} = \frac{M_2 + M}{M_2},$$

ce qui donne

$$\frac{p_2}{p_2} = \frac{M_2 + M}{M_2} \times \frac{T'_2}{T_2},$$

ou bien, en remplaçant T'_2 par sa valeur tirée de l'équation (11),

$$(12) \qquad \frac{p'_2}{p_2} = 1 + \frac{M_1 T_1}{M_2 T_2}\left[1 - \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right].$$

Les équations (9), (10), (11), (12) font connaître l'état du gaz dans les deux ballons en fonction du poids M de gaz qui s'est écoulé.

116. L'écoulement cesse quand les pressions p'_1 et p'_2 dans les deux ballons deviennent égales ; on a alors, en égalant les valeurs de ces deux pressions,

$$p_1\left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}} = p_2\left\{1 + \frac{M_1 T_1}{M_2 T_2}\left[1 - \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right]\right\}.$$

Cette équation permet de calculer le poids M du gaz écoulé. Comme on a

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 v_1}{p_2 v_2},$$

et

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{V_1}{V_2}\frac{v_2}{v_1},$$

il en résulte

$$\frac{M_1 T_1}{M_2 T_2} = \frac{V_1 p_1}{V_2 p_2}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation précédente, il vient

$$\left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\left(p_1 + p_1\frac{V_1}{V_2}\right) = p_2\left(1 + \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}\right);$$

on en déduit

$$(13) \qquad M = M_1\left\{1 - \left[\frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{p_1(V_1 + V_2)}\right]^{\frac{c}{C}}\right\},$$

et l'équation (10) devient

$$(14)\qquad \frac{T'_1}{T_1} = \left[\frac{p_1V_1 + p_2V_2}{p_1(V_1 + V_2)}\right]^{\frac{C-c}{C}}.$$

117. Pour appliquer ces formules au cas où l'écoulement s'opère du vase A dans l'atmosphère, il suffit de supposer que le volume V_2 du vase B est infini, ainsi que la masse M_2. Les équations (13) et (14) se réduisent à

$$(15)\qquad M = M_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{c}{C}}\right],$$

$$(16)\qquad \frac{T'_1}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{C-c}{C}},$$

et l'équation (11) à $T'_2 = T_2$, résultat évident *à priori*.

Application numérique. — Supposons que le volume V_1 du ballon A soit de 1 mètre cube, et qu'il renferme de l'air sec à la température de 30 degrés, sous la pression de 5 atmosphères; le poids du gaz est de $5^{kil},8256$. L'écoulement cesse quand la pression dans le ballon est de 1 atmosphère; on a alors

$$M = M_1\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{c}{C}}\right] = 3^{kil},9652,$$

$$T'_1 = 190^\circ, \quad \text{d'où} \quad t'_1 = -83^\circ.$$

L'écoulement du gaz est donc accompagné d'un abaissement considérable de température.

118. Nous pouvons maintenant étudier plus complétement l'une des expériences par laquelle M. Joule a démontré que le travail intérieur est négligeable dans les gaz (n° 54). Supposons que le ballon A soit plein de gaz et le ballon B vide; il suffit alors de faire dans les équations générales

$$M_2 = 0, \quad p_2 = 0.$$

Il n'y a pas lieu d'attribuer au ballon vide une température initiale. La notion de température suppose essentiellement

l'existence d'une matière pondérable; dans la théorie des ondulations, l'éther libre est considéré comme un milieu parfaitement élastique, servant à transmettre les ondulations; dès que l'onde est passée, l'éther revient au repos; ainsi on regarde l'éther libre comme un milieu jouissant de la propriété de transmettre intégralement la force vive émise par la source, sans en rien retenir pour lui-même.

L'équation (13) détermine d'abord le poids M du gaz qui s'est écoulé,

$$(17)\qquad M = M_1\left[1-\left(\frac{V_1}{V_1+V_2}\right)^{\frac{c}{C}}\right].$$

On en déduit

$$\frac{M_1-M}{M_1} = \left(\frac{V_1}{V_1+V_2}\right)^{\frac{c}{C}},$$

et les équations (9), (10) et (11) deviennent

$$(18)\qquad p'_1 = p'_2 = p_1\left(\frac{M_1-M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}} = p_1\frac{V_1}{V_1+V_2},$$

$$(19)\qquad T'_1 = T_1\left(\frac{M_1-M}{M_1}\right)^{\frac{C-c}{c}} = T_1\left(\frac{V_1}{V_1+V_2}\right)^{\frac{C-c}{C}},$$

$$(20)\qquad T'_2 = T_1\frac{M_1}{M}\left[1-\left(\frac{M_1-M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right] = T_1\frac{1-\dfrac{V_1}{V_1+V_2}}{1-\left(\dfrac{V_1}{V_1+V_2}\right)^{\frac{c}{C}}}.$$

On voit que la température finale T'_1, dans le ballon A qui renfermait le gaz, est inférieure à la température initiale T_1 et que la température finale T'_2 du ballon vide B est plus élevée que T_1. L'écoulement du gaz a été accompagné d'un refroidissement dans le ballon A.

119. Comme dernière application, supposons que le ballon B soit vide d'abord et qu'on le mette en communication avec l'atmosphère; il suffira de regarder le ballon A comme

infini et de faire dans les formules du numéro précédent $M_1 = \infty$, $V_1 = \infty$. Les équations (18) et (19) se réduisent à $p'_1 = p'_2 = p_1$, $T'_1 = T_1$, résultats évidents *à priori*. Avant d'introduire dans l'équation (17) les hypothèses particulières à la question actuelle, il faut la transformer; on a $v_1 = \frac{V_1}{M_1}$, ou $M_1 = \frac{V_1}{v_1}$. Si l'on remplace M_1 par sa valeur, l'équation devient

$$M = \frac{V_1}{v_1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_1 + V_2}\right)^{\frac{c}{C}}\right]$$

$$= \frac{V_1}{v_1}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c}{C}}}\right] = \frac{V_1}{v_1}\left[1 - \left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{c}{C}}\right];$$

si l'on développe cette expression en série, il vient

$$M = \frac{V_1}{v_1}\left[\frac{c}{C}\frac{V_2}{V_1} + B\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + \ldots\right].$$

Le volume V_1 étant infini, le second membre se réduit à son premier terme, et l'on a

$$M = \frac{c}{C}\frac{V_2}{v_1}. \tag{21}$$

L'équation (20)

$$T'_2 = \frac{M_1 T_1}{M}\left[1 - \left(\frac{M_1 - M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right],$$

présente la même difficulté que la précédente. On peut l'écrire

$$T'_2 = \frac{M_1 T_1}{M}\left[1 - \left(1 - \frac{M}{M_1}\right)^{\frac{C}{c}}\right],$$

et, en développant le second membre en série,

$$T'_2 = \frac{M_1 T_1}{M}\left[\frac{C}{c}\frac{M}{M_1} + B'\left(\frac{M}{M_1}\right)^2 + \ldots\right].$$

Comme M_1 est infini, cette équation se réduit à

$$T'_2 = \frac{C}{c} T_1. \tag{22}$$

Application numérique. — Supposons que la température de l'atmosphère soit de 20 degrés, on aura $T_1 = 273 + 20 = 293$, et, en vertu de l'équation (22), $T'_2 = 413$ ou $t'_2 = 140$ degrés. Ainsi la rentrée brusque de l'air dans le vase B produit une grande élévation de température.

120. Cette dernière expérience donne un moyen très-simple de déterminer le rapport des chaleurs spécifiques; on déduit, en effet, de l'équation (22)

$$\frac{C}{c} = \frac{T'_2}{T_1}. \tag{23}$$

Mais comme la température T'_2 est difficile à observer, on préfère recourir à une mesure de pression. Si l'on ferme le robinet aussitôt après la rentrée du gaz, on enferme dans le vase B une certaine masse de gaz à la température T'_2 et à la pression atmosphérique p_1; si on laisse ensuite refroidir ce gaz jusqu'à la température T_1 de l'air ambiant, sa pression s'abaissera jusqu'à une pression p' inférieure à p_1; comme le volume spécifique du gaz reste le même, on a

$$\frac{p_1}{p'} = \frac{T'_2}{T_1},$$

et l'équation (23) devient

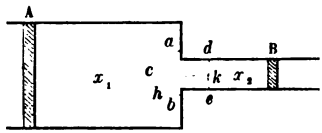
$$\frac{C}{c} = \frac{p_1}{p'}. \tag{24}$$

ÉCOULEMENT DES VAPEURS.

121. Considérons, comme nous l'avons fait pour les fluides en général, deux cylindres A et B (*fig.* 28) fermés par des pistons et renfermant un mélange de liquide et de vapeur qui s'écoule du cylindre A dans le cylindre B. Appelons x_1 le titre de la vapeur dans le premier cylindre, x_2 le titre dans le tube

d'écoulement. Nous admettons que la vapeur ne se surchauffe pas pendant l'écoulement; on verra plus loin que cette hypothèse est conforme à l'expérience.

Fig. 28.



La transformation s'opère entre deux surfaces *acb*, *de*, très-voisines de l'ouverture; si l'on considère une petite masse *m* décrivant la trajectoire *hk*, d'après ce que nous avons dit (n° 111), on peut appliquer à la transformation intérieure de cette masse toutes les formules qui ont été établies dans le Chapitre précédent pour l'étude de la transformation d'un mélange de liquide et de vapeur. Comme nous admettons que le passage de la masse *m* du point *h* au point *k* s'opère dans un temps assez court pour qu'il n'y ait pas communication de chaleur entre cette masse *m* et la masse environnante, nous emploierons les équations (15) et (16) du n° 100,

$$\frac{L_2 x_2}{T_2} - \frac{L_1 x_1}{T_1} = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{T}\, dT,$$

$$U_2 - U_1 = EL_1 x_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$
$$+ E\int_{T_1}^{T_2} m\left(1 - \frac{T_2}{T}\right) dT - (p_2 v_2 - p_1 v_1) + \int_{p_1}^{p_2} u\, dp.$$

En remplaçant $U_2 - U_1$ par sa valeur dans l'équation générale

$$(1) \qquad \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = p_1 v_1 - p_2 v_2 - (U_2 - U_1),$$

que nous avons trouvée (n° 110) pour l'écoulement des fluides, on obtient l'équation

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} &= EL_1 x_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1} \\ &\quad + E\int_{T_2}^{T_1} m\left(1 - \frac{T_2}{T}\right) dT + \int_{p_2}^{p_1} u\, dp. \end{aligned} \right.$$

Si la section du vase A est assez grande pour que la vitesse w_1 soit négligeable, cette équation devient

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{w_2^2}{2g} &= \mathrm{EL}_1 x_1 \frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1} \\ &\quad + \mathrm{E}\int_{\mathrm{T}_2}^{\mathrm{T}_1} m\left(1 - \frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}}\right) d\mathrm{T} + \int_{p_2}^{p_1} u\, dp. \end{aligned}\right.$$

Dans la pratique, on peut regarder le volume spécifique u du liquide comme constant, et remplacer le coefficient m par la chaleur spécifique C supposée constante, ce qui donne la formule approchée

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{w_2^2}{2g} &= \mathrm{EL}_1 x_1 \frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1} \\ &\quad + \mathrm{EC}\left(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_2 \log \frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_2}\right) + u\,(p_1 - p_2). \end{aligned}\right.$$

Nous avons admis que la vapeur reste saturée dans le tube d'écoulement. Pour justifier cette hypothèse, supposons la vapeur saturée et sèche dans le cylindre A, et soit $t = 152^{\circ}2'$, $p_1 = 5$ atm., $p_2 = 1$ atm. $= 10\,334^{\mathrm{kil}}$. La vapeur s'écoulant dans l'atmosphère, sa température t_2 est alors évidemment de 100 degrés. Les Tables d'expériences de M. Regnault donnent pour ces températures

$$\mathrm{L}_1 = 499,$$
$$\mathrm{L}_2 = 536.$$

On a d'ailleurs $u = 0{,}001$; on déduit des formules précédentes

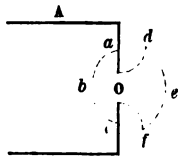
$$x_2 = 0{,}91,$$
$$w_2 = 734^{\mathrm{m}}.$$

Ainsi, non-seulement la vapeur reste saturée, mais il y a condensation partielle dans le tube d'écoulement.

122. Si la vapeur, au lieu de se rendre dans l'atmosphère par un long ajutage, sort du vase A par un orifice en mince paroi (*fig.* 29), l'expérience apprend que le jet s'élargit très-rapidement, de sorte qu'à une petite distance de l'orifice, sur

une surface déjà grande *def*, la pression devient égale à la pression atmosphérique p_2, et la vitesse w_2 très-petite. Il est impossible qu'il y ait condensation partielle de la vapeur

Fig. 29.



comme dans le cas précédent. Admettons en effet que la vapeur soit saturée sur la surface *def*; la température t_2 serait de 100 degrés; comme on a d'ailleurs $T_1 > T_2$, les trois termes qui composent le second membre de l'équation (26) étant positifs, w_2 aurait nécessairement une valeur assez grande. Mais, comme nous l'avons dit, à cause du rapide épanouissement du jet de vapeur, w_2 est très-petit sur la surface *def*; on en conclut que l'hypothèse est inadmissible, et par conséquent que la vapeur est surchauffée.

Nous avons trouvé (n° 111), pour toute transformation d'un fluide, l'équation

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \int_{p_2}^{p_1} v\,dp,$$

qui se réduit à

$$\frac{w_2^2}{2g} = \int_{p_2}^{p_1} v\,dp,$$

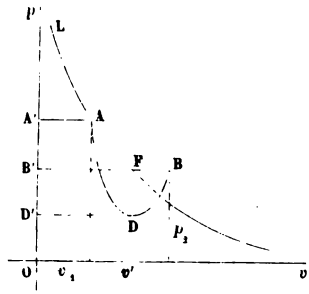
quand $w_1 = 0$. On peut appliquer cette équation à chaque phase de la transformation et écrire

$$\frac{w^2}{2g} = \int_{p}^{p_1} v\,dp.$$

Cette intégrale a une signification géométrique dont il est facile de se rendre compte. Soit A (*fig.* 30) l'état initial de la vapeur saturée sèche, B l'état final; menons par le point A la courbe L de saturation. Pour aller de l'état A à l'état B, le mélange suit une courbe telle que ADB, et si la vitesse w_2 est

sensiblement nulle au point B, l'aire totale de la courbe, comptée sur l'axe *op* comme base, doit être sensiblement nulle. Le point B doit donc être situé de telle sorte que l'aire négative BDD'B' soit égale à l'aire positive AA'D'D.

Fig. 30.



La vitesse du mélange, à l'orifice même, est très-grande; comme la vitesse était nulle sur la surface *abc* (*fig.* 29), il y a eu condensation croissante depuis cette surface jusqu'à l'orifice O et transformation d'énergie calorifique en énergie sensible, c'est-à-dire en force vive du mouvement de translation. A partir de l'orifice, le contraire a lieu, l'énergie sensible se transforme en chaleur et la vapeur se surchauffe.

123. Appelons T' la température et U' l'énergie intérieure de la vapeur surchauffée à l'état B. Puisque les vitesses w_1 et w_2 sont très-petites, l'équation (1) se réduit à

$$U' - U_1 = p_1 v_1 - p_2 v'.$$

Concevons que l'on aille de A en B par le chemin AFB (*fig.* 30); caractérisons par l'indice 2 l'état du mélange en F; pour la transformation suivant la ligne de saturation AF, on a, d'après l'équation approchée (14) du n° 99,

$$U_2 - U_1 = E(L_2 - L_1) + EC(T_2 - T_1) - p_2 v_2 + p_1 v_1 + (p_2 - p_1)u.$$

Pour la transformation FB de la vapeur surchauffée à pression constante p_2, on a

$$E\,dQ = EC'\,dT = dU + p_2\,dv,$$

d'où

$$U' - U_2 = EC'(T' - T_2) - p_2(v' - v_2).$$

On en déduit

$$U' - U_1 = E(L_2 - L_1) + EC(T_2 - T_1) + EC'(T' - T_2) + p_1 v_1 - p_2 v' + (p_2 - p_1) u,$$

et, en égalant cette valeur de $U' - U_1$ à celle trouvée précédemment,

$$(28) \quad C(T_2 - T_1) + C'(T' - T_2) + L_2 - L_1 + A(p_2 - p_1) u = 0.$$

La pression p_2 est donnée : c'est la pression atmosphérique; T_2 est la température de la vapeur saturée sous cette pression p_2; l'équation (28) donnera la température T' du jet après l'épanouissement

De la formule empirique

$$L = 606,50 - 0,695\, t,$$

on déduit

$$L_2 - L_1 = 0,695(t_1 - t_2).$$

On a d'ailleurs approximativement $C = 1$, $C' = 0,4805$, $u = 0,001$; en substituant dans l'équation (28), on obtient la formule pratique

$$(29) \qquad t' - t_2 = 0,6348(t_1 - t_2) + 0,0506(p_1 - p_2),$$

dans laquelle les pressions p_1 et p_2 sont exprimées en atmosphères.

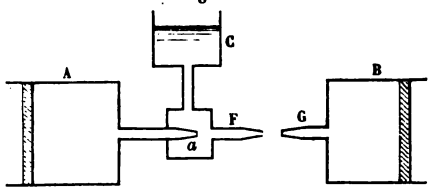
Application numérique : $t_1 = 150°$, $p_1 = 4,7$, $p_2 = 1$, $t_2 = 100°$; on trouve $t' = 132°$.

INJECTEUR GIFFARD.

124. L'injecteur imaginé par M. Giffard est destiné à remplacer la pompe alimentaire dans les machines à vapeur; un jet de vapeur, sortant de la chaudière, aspire l'eau alimentaire et la fait pénétrer dans la chaudière elle-même. Pour bien faire comprendre le jeu de cet appareil ingénieux, considérons un cylindre A (*fig.* 31), muni d'un piston et renfermant de la

vapeur au titre x_1, à la température T_1, sous la pression p_1. Cette vapeur s'écoule par un tube a et rencontre de l'eau

Fig. 31.



froide qui vient d'un vase C où elle est à la pression atmosphérique p_0 et à la température T_0. La vapeur se condense au contact de l'eau froide; la chaleur dégagée par la condensation se transforme en énergie sensible et le jet liquide sort dans l'air par le tube F avec une grande vitesse. Il pénètre alors dans le tube G qui communique avec un deuxième cylindre B muni d'un piston et s'arrête dans ce cylindre à la température T_2 et à la pression p_2.

Calculons d'abord la vitesse du liquide à la sortie du tube F dans l'air. Appelons U_1 et U_0 l'énergie intérieure dans le cylindre A et dans le réservoir C; T'_2 la température et U'_2 l'énergie intérieure du jet liquide dans l'air, M_1 le poids de vapeur qui sort de la chaudière pendant une seconde, et M_0 le poids d'eau que cette vapeur entraîne. Pendant un temps infiniment petit θ, le poids du liquide qui sort par le tube F est égal à

$$M_1\theta + M_0\theta.$$

Comme il n'y a pas de communication de chaleur avec l'extérieur, la variation d'énergie de cette masse liquide est égale au travail des forces extérieures pendant le même temps. L'énergie totale du liquide en F est

$$(M_1 + M_0)\,\theta\,\frac{w^2}{2g} + (M_1 + M_0)\,\theta\,U'_2,$$

w étant la vitesse d'écoulement; l'énergie primitive de la même masse était

$$M_1\theta U_1 + M_0\theta U_0.$$

Quant au travail des forces extérieures, il se compose : 1° du travail de la force motrice dans le cylindre A, lequel est $+p_1 M_1 v_1 \theta$; 2° du travail résistant de la pression extérieure en F, $-p_0(M_1+M_0)\theta v'_2$; 3° du travail produit par la pression atmosphérique dans le vase C, et par la pression de la colonne de liquide dont la surface est à une hauteur h au-dessus du tube d'écoulement, ce qui fait $+p_0 M_0 v_0 \theta + M_0 \theta h$. En supprimant le facteur θ qui est commun à tous les termes, on a donc l'équation

$$(M_1+M_0)\frac{w^2}{2g}+(M_1+M_0)U'_2-M_1U_1-M_0U_0$$
$$=p_1M_1v_1-p_0(M_1+M_0)v'_2+p_0M_0v_0+M_0h.$$

D'après l'équation (13) du n° 99, le mélange de vapeur et de liquide dans le cylindre A a pour énergie intérieure

$$U_1=U_0+EC(T_1-T_0)+EL_1x_1-p_1(v_1-u);$$

le liquide qui s'écoule dans l'air,

$$U'_2=U_0+EC(T'_2-T_0).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente et remarquant que les volumes spécifiques v_0 et v'_2 peuvent être remplacés par u, on obtient l'équation

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}&(M_1+M_0)\frac{w^2}{2g}+M_0EC(t'_2-t_0)+M_1EC(t'_2-t_1)\\&\quad=EM_1L_1x_1+M_1(p_1-p_0)u+M_0h,\end{aligned}\right.$$

qui permet de calculer la vitesse d'écoulement w, si l'on connaît la température t'_2 du liquide. On peut remarquer que le terme le plus important dans le second membre est $EM_1L_1x_1$, qui provient de la condensation de la vapeur; c'est surtout l'énergie calorifique due à cette condensation qui produit l'énergie sensible.

125. Examinons maintenant la seconde partie de l'appareil, et écrivons encore que, pendant un temps infiniment petit θ, la variation d'énergie intérieure du liquide est égale à la somme des travaux des forces extérieures. En appelant U_2 l'é-

nergie intérieure de l'unité de poids dans le cylindre B, v_2 le volume spécifique, et admettant que le liquide arrivé dans le cylindre n'a plus de vitesse sensible, on a l'équation

$$(M_1 + M_0)\theta U_2 - (M_1 + M_0)\theta\left(\frac{w^2}{2g} + U'_2\right)$$
$$= (M_1 + M_0)\theta p_0 v'_2 - (M_1 + M_0)\theta p_2 v_2.$$

En substituant à U_2 et U'_2 leurs valeurs et faisant les simplifications habituelles, il vient

$$(31) \qquad -\frac{w^2}{2g} + EC(t_2 - t'_2) = (p_0 - p_2)u.$$

Si l'on connaît la température t_2 dans le vase B, cette équation permet de calculer la pression p_2 que le jet liquide est capable de vaincre.

En ajoutant à l'équation (30) l'équation (31) multipliée par $(M_1 + M_0)$, tous les termes relatifs à l'état intermédiaire disparaissent, et il vient

$$(32) \left\{ \begin{aligned} & EC[M_0(t_2 - t_0) + M_1(t_2 - t_1)] \\ & \quad = EM_1 L_1 x_1 + M_0(p_0 - p_2)u + M_1(p_1 - p_2)u + M_0 h. \end{aligned} \right.$$

On aurait pu écrire cette équation directement, en appliquant l'équation du travail aux deux états extrêmes.

Dans la pratique, les deux cylindres A et B sont deux portions de la même chaudière et les pressions p_1 et p_2 sont égales. En outre le réservoir C de liquide est situé au-dessous du tube d'écoulement, il faut donc remplacer h par $-h'$. On peut alors calculer la quantité d'eau froide entraînée par un poids donné de vapeur. L'équation (32) donne

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{EL_1 x_1 + EC(t_1 - t_2)}{EC(t_2 - t_0) + (p_1 - p_0)u + h'},$$

$$(33) \qquad \frac{M_0}{M_1} = \frac{L_1 x_1 + C(t_1 - t_2)}{C(t_2 - t_0) + A h' + A(p_1 - p_0)u}.$$

Le jet de vapeur qui sort de la chaudière produit donc l'effet d'une pompe aspirante et foulante, prenant l'eau dans le réservoir et la refoulant dans la chaudière. Le dernier terme

$_0$) u est négligeable, et on peut prendre comme valeur
:e

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{L_1 x_1 + C(t_1 - t_2)}{C(t_2 - t_0) + A h'}.$$

ıs que la vapeur fournie par la chaudière soit sèche
: liquide refoulé ait la température de la chaudière,
ılors $x_1 = 1$ et $t_2 = t_1$, ce qui donne

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{L_1}{C(t_1 - t_0) + A h'}.$$

CHAPITRE VII.

FUSION ET SOLIDIFICATION.

Passage de l'état liquide à l'état solide. — Transformation d'un mélange de liquide et de solide. — Température de fusion de la glace.

PASSAGE DE L'ÉTAT LIQUIDE A L'ÉTAT SOLIDE.

126. Quand on échauffe progressivement un corps solide sous une pression donnée, il arrive un moment où la fusion commence; pendant tout le temps que dure la fusion la température reste constante. La *température de fusion* d'un corps dépend de la pression qu'il supporte; c'est une fonction de la pression que nous représenterons par $t = f(p)$; c'est la température maximum de la forme solide sous la pression p. Un kilogramme du corps, en se liquéfiant, absorbe une certaine quantité de chaleur L que l'on appelle *chaleur latente de fusion*.

Le passage inverse de l'état liquide à l'état solide est moins régulier. On peut maintenir un corps sous la forme liquide à une température bien inférieure à celle de la solidification normale. Ici encore, comme pour la vaporisation, la chaleur latente de solidification retardée est plus faible, en général, que la chaleur latente de solidification normale.

Soit en effet t la température de solidification normale d'un corps sous la pression p; nous pouvons amener un kilogramme du corps de la température t à la température $t - \theta$ de deux manières, en le solidifiant d'abord à la température normale t et abaissant ensuite le corps solide de t à $t - \theta$, ou bien en abaissant d'abord le liquide de t à $t - \theta$ et le solidifiant ensuite à cette température $t - \theta$, la pression restant toujours la même et égale à p. Appelons C la chaleur spécifique à l'état liquide,

C′ la chaleur spécifique à l'état solide, L la chaleur latente de solidification normale, et L′ la chaleur latente de solidification retardée à la température $t - \theta$.

La chaleur perdue pendant la première transformation est

$$L + \int_{t-\theta}^{t} C' dt;$$

pendant la seconde transformation elle est

$$\int_{t-\theta}^{t} C dt + L'.$$

Ces deux quantités de chaleur sont égales; car le travail extérieur est le même dans les deux transformations, ainsi que la variation d'énergie intérieure. On a donc

$$L + \int_{t-\theta}^{t} C' dt = \int_{t-\theta}^{t} C dt + L',$$

d'où

$$L' = L - \int_{t-\theta}^{t} (C - C') dt.$$

Comme la chaleur spécifique C du liquide est plus grande que la chaleur spécifique C′ du solide, il en résulte que la chaleur latente normale L est plus grande que L′.

TRANSFORMATION D'UN MÉLANGE DE LIQUIDE ET DE SOLIDE.

127. Considérons un mélange de liquide et de solide formant un poids total de 1 kilogramme à la température t. Soient x le poids du solide, $1 - x$ celui du liquide; désignons par u et u' les volumes spécifiques du liquide et du solide; le volume spécifique v du mélange sera

$$(1) \qquad v = u(1 - x) + u'x = u + (u' - u)x.$$

Comme nous l'avons fait pour le mélange de liquide et de vapeur, nous prendrons t et x pour variables indépendantes. Concevons que le mélange éprouve une transformation infi-

nument petite qui le fasse passer de l'état (t, x) à l'état $(t+dt, x+dx)$, la quantité de chaleur nécessaire pour opérer cette transformation sera

$$dQ = (1-x)\left(C + h\frac{dp}{dt}\right)dt + x\left(C' + h'\frac{dp}{dt}\right)dt - L\,dx,$$

les lettres accentuées se rapportant à l'état solide. Cette équation est la même que celle que nous avons trouvée (n° 89) pour la transformation d'un mélange de liquide et de vapeur, sauf que le dernier terme $L\,dx$, qui correspond à la solidification du poids dx de liquide, est changé de signe.

Si l'on pose

$$C + h\frac{dp}{dt} = m,$$

$$C' + h'\frac{dp}{dt} = m',$$

elle devient

$$(2) \qquad dQ = [m + (m'-m)x]\,dt - L\,dx.$$

Le travail extérieur accompli est

$$dS = p\,dv = p\left[\frac{du}{dt} + x\frac{d(u'-u)}{dt}\right]dt + p(u'-u)\,dx.$$

Enfin de l'équation fondamentale

$$(a) \qquad dQ = A(dU + p\,dv),$$

on déduit la variation d'énergie intérieure

$$(3) \quad \begin{cases} A\,dU = \left[m + (m'-m)x - Ap\dfrac{du}{dt} - Apx\dfrac{d(u'-u)}{dt}\right]dt \\ \qquad - [L + Ap(u'-u)]\,dx. \end{cases}$$

128. Le second membre de cette équation étant une différentielle exacte, on a

$$A\frac{\partial U}{\partial t} = m + (m'-m)x - Ap\frac{du}{dt} - Apx\frac{d(u'-u)}{dt},$$

$$A\frac{\partial U}{\partial x} = -L - Ap(u'-u),$$

et, par suite,

$$A\frac{\partial^2 U}{dt\,dx} = (m' - m) - Ap\frac{d(u' - u)}{dt},$$

$$A\frac{\partial^2 U}{dx\,dt} = -\frac{dL}{dt} - A(u' - u)\frac{dp}{dt} - Ap\frac{d(u' - u)}{dt}.$$

En égalant ces deux dérivées secondes, on obtient l'équation de M. Clausius

$$(\alpha)\qquad -\frac{dL}{dt} + m - m' = A(u' - u)\frac{dp}{dt}.$$

On a aussi

$$\frac{dQ}{T} = \frac{m + (m' - m)x}{T}\,dT - \frac{L}{T}\,dx;$$

d'après le second principe fondamental $\frac{dQ}{T} = d\mu$, le second membre étant la différentielle exacte d'une fonction μ des deux variables indépendantes T et x, on en déduit la relation de M. W. Thomson

$$(\beta)\qquad \frac{d\left(\frac{L}{T}\right)}{dT} = \frac{m - m'}{T},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$(\beta_1)\qquad \frac{dL}{dT} - \frac{L}{T} = m - m'.$$

Enfin la combinaison des équations (α) et (β_1) conduit à la troisième relation

$$(\gamma)\qquad \frac{L}{T} = A(u - u')\frac{dp}{dT}.$$

TEMPÉRATURE DE FUSION DE LA GLACE.

129. Cette dernière équation donne lieu à quelques remarques importantes. La chaleur latente L étant toujours positive, les deux quantités $u - u'$ et $\frac{dp}{dT}$ ont le même signe. La plupart des corps se dilatent en se liquéfiant, la différence

$u - u'$ est alors positive; on en conclut que la dérivée $\frac{dp}{dt}$ est aussi positive, et par conséquent que la température de fusion normale est d'autant plus élevée que la pression est plus forte. Cette conséquence de la théorie a été vérifiée par M. Bunsen sur le blanc de baleine et la paraffine; en portant la pression de 1 à 156 atmosphères, ce physicien a vu la température de fusion du blanc de baleine s'élever de 47°,7 à 50°,9. Il y a probablement lieu de tenir compte de cette loi en géologie: des roches soumises à une énorme pression peuvent rester solides à une très-haute température.

Mais il y a quelques corps, et la glace est de ce nombre, qui se contractent en se liquéfiant; la différence $u - u'$ est alors négative, ainsi que $\frac{dp}{dt}$; on en conclut que la température de fusion est d'autant plus basse que la pression est plus forte. Ainsi, de la glace soumise à une forte pression peut se fondre à une température inférieure à zéro. Nous pouvons même calculer cet abaissement de température; de l'équation (γ) on déduit en effet

$$\frac{dT}{dp} = -A(u' - u)\frac{T}{L}.$$

Supposons que la pression p soit de 1 atmosphère; on a alors pour l'eau $T = 273°$, $L = 79,25$, $u = 0,001$, $u' = \frac{1}{923}$, d'où

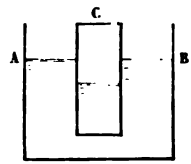
$$\frac{dT}{dp} = -0,0070.$$

Ainsi, à un accroissement de pression de 1 atmosphère correspond un abaissement de 0°,0070 environ dans la température de fusion de la glace. C'est M. James Thomson qui, le premier, a indiqué cette propriété de la glace comme une conséquence du théorème de Carnot; M. William Thomson, son frère, l'a vérifiée ensuite par l'expérience : il a trouvé un abaissement de 0°,0075 pour chaque atmosphère, résultat peu différent du précédent. M. Mousson, à l'aide d'un appareil très-ingénieux, a pu abaisser la température de fusion de la

ace jusqu'à —18°, en exerçant une pression très-considérable.

130. Une expérience très-simple de M. Helmholtz permet de démontrer que réciproquement, quand la pression diminue, la température de fusion de la glace devient plus élevée. Dans un vase AB (*fig.* 32), renfermant de la glace fondante, on

Fig. 32.



place un vase métallique C contenant de l'eau et dans lequel on a fait le vide partiel; on voit des cristaux de glace se former dans le vase C, tandis que la glace fond à l'extérieur; on en conclut que l'eau du cylindre C se congèle à une température un peu supérieure à zéro.

On peut de la même manière expliquer les expériences curieuses de Faraday et de M. Tyndall. Une expérience de M. Tyndall consiste à placer de la glace pilée entre deux moules de buis très-épais creusés de cavités lenticulaires dans les deux faces en regard. On comprime énergiquement la glace entre les deux moules, et quand on les écarte ensuite on constate qu'il s'est formé une lentille de glace parfaitement homogène et transparente. La glace s'est fondue en partie au moins pendant la compression, et le liquide formé s'est solidifié de nouveau à la pression atmosphérique. Faraday a désigné ce phénomène sous le nom de *regel*. Il suffit du reste que deux morceaux de glace se touchent sous une légère pression, pour qu'on les voie se souder l'un à l'autre. Quand deux corps solides se touchent par un élément de surface ω et sont pressés l'un contre l'autre avec une force F, la pression p par unité de surface est $p = \frac{F}{\omega}$; elle peut être très-grande à cause de la petitesse de ω. S'il s'agit de deux mor-

ceaux de glace à t°, la pression qui s'exerce au point de contact abaissant la température de fusion, une petite quantité de glace se fondra en cet endroit; l'eau qui en résulte, se répandant alentour et n'étant plus soumise à la même pression, se gèlera de nouveau. Mais à mesure que le phénomène se produit, la surface de contact ω s'élargit et la pression p diminue. Le phénomène cessera quand ω sera devenu assez grand pour que p soit inférieure à la pression relative à la température t.

C'est là ce qui se passe quand on comprime des morceaux de glace dans un vase; les morceaux se touchent par leurs aspérités : c'est là que s'exerce la pression la plus forte; ces aspérités fondent, les morceaux glissent les uns sur les autres, se touchent en de nouveaux points qui fondent à leur tour; en même temps, l'eau provenant de la fusion se loge dans les vides, où n'étant plus soumise à la même pression, elle se congèle de nouveau; à la fin on a un bloc de glace présentant la forme du vase.

Toutefois ce bloc de glace diffère par ses propriétés optiques d'un bloc de glace naturel, comme l'a montré M. Bertin : ce dernier, formé de cristaux orientés tous dans la même direction, présente des apparences de polarisation colorée, tandis que le premier, composé d'un assemblage de morceaux orientés dans tous les sens, se comporte comme un morceau de verre.

Ces phénomènes produits par la pression paraissent jouer un grand rôle dans la marche des glaciers. On sait que les glaciers marchent comme des fleuves : d'après les observations de M. Tyndall, la mer de glace de Montanvers, à Chamouni, s'avance de 4 décimètres par jour d'hiver et de $7\frac{1}{2}$ décimètres par jour d'été. La pression exercée par la colonne de glace à sa base peut occasionner une fusion locale et permettre un glissement sur les rochers qui forment le lit du glacier.

CHAPITRE VIII.

TRANSFORMATION GÉNÉRALE DES CORPS.

Coefficient de dilatation cubique; — de compressibilité cubique. — Barre ou fil cylindrique. — Phénomènes présentés par le caoutchouc.

---

131. Nous savons qu'il existe une relation

$$\varphi(t, v, p) = 0,$$

entre la température, le volume spécifique et la pression; mais cette relation n'est connue que pour les gaz parfaits. Si on l'imagine résolue par rapport à v, le volume spécifique peut être regardé comme une fonction de deux variables indépendantes t et p. La marche à suivre pour étudier cette fonction serait de déterminer d'abord par l'expérience ses deux dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial p}$ pour divers systèmes de valeurs de t et de p.

1° Laissant p constante, et faisant varier t, on observera la variation du volume. Ces expériences donnent ce qu'on appelle *le coefficient de dilatation cubique sous pression constante*; en désignant par α ce coefficient, on a

$$\alpha = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t},$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha v. \tag{1}$$

2° Laissant t constante, et faisant varier p, on observera la variation du volume. Ces expériences donnent le *coefficient de compressibilité cubique* à température constante. En appelant β ce coefficient, on a

$$\beta = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p},$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{\partial v}{\partial p} = -\beta v.$$

Deux séries d'expériences, dans lesquelles on ferait vari t et p, donneraient les deux fonctions $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial p}$ de t et p; l' tégration de la différentielle totale

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}\, dt + \frac{\partial v}{\partial p}\, dp,$$

ou

$$(3) \qquad \frac{dv}{v} = \alpha\, dt - \beta\, dp,$$

ferait connaître ensuite la fonction $v = f(t, p)$.

132. Après avoir trouvé cette fonction, il faudrait ens déterminer l'énergie intérieure. On la déduirait de l'équa fondamentale (a),

$$dU = E\,dQ - p\,dv,$$

si l'on connaissait dQ. Nous avons posé (n° **41**)

$$dQ = C\,dt + h\,dp;$$

on détermine C directement par l'expérience; de l'é tion (β_3) de M. W. Thomson (n° **73**)

$$h = -AT\frac{\partial v}{\partial T},$$

on déduit, à l'aide de l'équation (1),

$$(4) \qquad h = -A\alpha v T.$$

En remplaçant h et dv par leurs valeurs (4) et (3), on a

$$(5) \qquad dU = (EC - \alpha v p)\, dT + v(\beta p - \alpha T)\, dp;$$

l'intégration de cette différentielle totale donnerait la f tion U de T et de p.

On peut obtenir dQ d'une autre manière. Nous avons (n° **40**)

$$dQ = c\,dt + l\,dv;$$

plaçant dv par sa valeur (3), on a

$$dQ = (c + \alpha lv)\,dt - \beta lv\,dp.$$

identifie cette expression avec la précédente, il vient

$$c + \alpha lv = C, \quad \beta lv = -h = A\alpha vT,$$

$$l = \frac{A\alpha T}{\beta},$$

$$C - c = \frac{A\alpha^2 vT}{\beta}.$$

termine C directement par l'expérience, comme nous
dit; c s'en déduit par l'équation (7); d'ailleurs l'équa-
) donne l. On obtient ainsi l'expression différentielle

$$dU = \left(EC - \frac{\alpha^2 vT}{\beta}\right) dT + \left(\frac{\alpha T}{\beta} - p\right) dv,$$

intégration donnerait U.

Imaginons que l'on comprime un corps assez rapide-
pour qu'un échange de chaleur n'ait pas le temps de
ir entre ce corps et le milieu environnant; la tempéra-
u corps sera une fonction de la pression définie par
tion

$$0 = dQ = C\,dt + h\,dp,$$

on déduit

$$\frac{dt}{dp} = \frac{A\alpha vT}{C}.$$

igne de dt est le même que celui du coefficient de dila-
cubique α. En général, le coefficient α est positif; dt est
positif, c'est-à-dire que la compression élève la tempé-
du corps. Mais pour l'eau à une température inférieure
grés, α est négatif; donc dt est négatif, et par consé-
la compression produit un abaissement de la tempéra-
cette conséquence a été vérifiée expérimentalement par
ule.

BARRE OU FIL CYLINDRIQUE.

134. Jusqu'à présent nous avons supposé que toute la surface du corps est soumise à une pression normale uniforme; il n'en est pas de même dans la question particulière que nous allons traiter. Considérons une barre cylindrique homogène dont la surface latérale est soumise à une pression constante et uniforme p_0 par mètre carré, et chacune des deux bases à une pression variable $\omega p_0 + p$, ω étant l'aire de la section. Soit x la longueur de la barre; il est clair qu'il existe une relation

$$\varphi(t, x, p) = 0, \tag{10}$$

entre les trois quantités t, x, p, dont deux à volonté peuvent être prises pour variables indépendantes. Le travail extérieur accompli par la barre dans une transformation infiniment petite est

$$dS = p_0\, dv + p\, dx,$$

et la première équation fondamentale

$$dQ = A(dU + dS),$$

devient

$$dQ = A(dU + p_0\, dv + p\, dx). \tag{11}$$

1° Si l'on prend t et x pour variables indépendantes, cette équation

$$dQ = A\left(\frac{\partial U}{\partial t} + p_0 \frac{\partial v}{\partial t}\right) dt + A\left(\frac{\partial U}{\partial x} + p_0 \frac{\partial v}{\partial x} + p\right) dx;$$

posons

$$c = A\left(\frac{\partial U}{\partial t} + p_0 \frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

$$l = A\left(\frac{\partial U}{\partial x} + p_0 \frac{\partial v}{\partial x} + p\right),$$

l'équation prend la forme simple

$$dQ = c\,dt + l\,dx, \tag{12}$$

et l'on a entre c et l la relation

$$\frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial x} = A\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{13}$$

2° Si l'on prend t et p pour variables indépendantes, l'équation fondamentale devient

$$dQ = A\left(\frac{\partial U}{\partial t} + p_0\frac{\partial v}{\partial t} + p\frac{\partial x}{\partial t}\right)dt + A\left(\frac{\partial U}{\partial p} + p_0\frac{\partial v}{\partial p} + p\frac{\partial x}{\partial p}\right)\partial p;$$

en posant

$$C = A\left(\frac{\partial U}{\partial t} + p_0\frac{\partial v}{\partial t} + p\frac{\partial x}{\partial t}\right),$$

$$h = A\left(\frac{\partial U}{\partial p} + p_0\frac{\partial v}{\partial p} + p\frac{\partial x}{\partial p}\right),$$

elle prend la forme simple

$$dQ = Cdt + hdp, \tag{14}$$

et l'on a entre C et h la relation

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial p} = -A\frac{\partial x}{\partial t}. \tag{15}$$

135. On peut aussi appliquer à la transformation de la barre le théorème de Carnot et les conséquences que nous en avons déduites. Ainsi on a toujours $\lambda = T$, et l'expression $\frac{dQ}{T}$ est la différentielle exacte d'une fonction μ de deux variables indépendantes.

1° Si l'on prend t et x pour variables indépendantes, la différentielle exacte

$$\frac{dQ}{T} = \frac{c}{T}dt + \frac{l}{T}dx$$

conduit à la relation (n° 72)

$$l = AT\frac{\partial p}{\partial T}. \tag{16}$$

2° Si l'on prend t et p pour variables indépendantes, on obtient de même la relation (n° 73)

$$h = -AT\frac{\partial x}{\partial T}. \tag{17}$$

136. On a observé pour un grand nombre de substances le

coefficient de dilatation linéaire sous pression constante

$$\alpha = \frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial t}.$$

Il en résulte, en vertu de l'équation (17),

$$h = -\mathrm{A}\alpha x\mathrm{T}. \tag{18}$$

On a observé aussi le coefficient de compressibilité linéaire à température constante

$$\beta = -\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial p}.$$

Si l'on regarde x comme une fonction de t et de p donnée par l'équation (10), on a

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial p}dp = x(\alpha dt - \beta dp),$$
$$d\mathrm{Q} = c\,dt + l\,dx = (c + \alpha l x)\,dt - \beta l x\,dp;$$

on en déduit

$$\mathrm{C} = c + \alpha l x, \quad h = -\beta l x;$$

d'où

$$l = \frac{\mathrm{A}\alpha\mathrm{T}}{\beta}, \tag{19}$$

$$\mathrm{C} - c = \frac{\mathrm{A}\alpha^2 x\mathrm{T}}{\beta}. \tag{20}$$

Imaginons que l'on comprime brusquement la barre, sans communication de chaleur, on aura

$$0 = d\mathrm{Q} = \mathrm{C}dt + h\,dp,$$

d'où

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\mathrm{A}\alpha x\mathrm{T}}{\mathrm{C}}. \tag{21}$$

Pour appliquer ces formules à un fil tiré à ses deux bouts par une même force, il suffit de changer le signe de p. Si l'on pose $p = -p'$, l'équation précédente devient

$$\frac{dt}{dp'} = -\frac{\mathrm{A}\alpha x\mathrm{T}}{\mathrm{C}}. \tag{22}$$

igne de dt est contraire à celui de α. Le coefficient de di-
on linéaire étant en général positif, on en conclut que
ngement d'un fil est accompagné ordinairement d'un
sement de température.

PHÉNOMÈNES PRÉSENTÉS PAR LE CAOUTCHOUC.

7. Le caoutchouc présente une exception : une lame de
tchouc tendue par un poids diminue de longueur quand
npérature s'élève; le coefficient α est donc négatif, et par
équent $\frac{dt}{dp'}$ positif; il en résulte que si l'on étire brusque-
t une lame de caoutchouc, la température s'élèvera. Ces
omènes ont été observés d'abord par Goffe, et des expé-
ces plus précises ont été faites par M. Joule avec le caout-
c vulcanisé.

Joule a reconnu d'abord que, si une lame de caoutchouc
oumise de toutes parts à une pression uniforme, son vo-
augmente quand la température s'élève; le coefficient
ilatation cubique est positif et égal à 0,000256; ensuite,
lorsqu'une lame de caoutchouc est tirée par un poids p',
iste une limite p'_1, telle, que si le poids tenseur p' est plus
t que p'_1, une élévation de température produit un allonge-
nt, et qu'au contraire, si p' est plus grand que p'_1, une élé-
on de température produit un raccourcissement : dans le
mier cas, α étant positif, un accroissement brusque de
sion diminue la température; dans le second cas, α étant
gatif, un accroissement de tension élève la température.

CHAPITRE IX.

THÉORIE DES GAZ.

Hypothèse fondamentale. — Explication de la pression. — Loi de Mariotte. — Loi des mélanges. — Énergie actuelle des gaz. — Transformation du travail extérieur en énergie calorifique ou inversement. — État solide et état liquide. — Vaporisation. — Formation des vapeurs dans un espace illimité. — Propagation des vibrations dans les gaz. — Lois de combinaison des gaz. — Loi de Dulong et Petit.

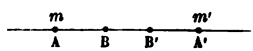
HYPOTHÈSE FONDAMENTALE.

138. L'hypothèse fondamentale qui sert de base à la théorie des gaz consiste à admettre que les molécules d'un corps à l'état gazeux n'ont pas d'action sensible les unes sur les autres. Cette hypothèse est une conséquence de l'expérience par laquelle M. Joule a démontré que le travail intérieur dans les gaz est nul (n° 54).

Au lieu de supposer que les molécules des gaz oscillent autour de leurs positions d'équilibre, comme dans les corps solides, on admet qu'elles sont animées de mouvements de translation très-rapides dans toutes les directions, mouvements rectilignes et uniformes. Les molécules d'un gaz sont en général à des distances telles les unes des autres, que les forces moléculaires sont négligeables, excepté à de certains intervalles et pendant des temps relativement très-courts, où, dans leur marche, deux molécules passent très-près l'une de l'autre; pendant ce temps très-petit, la force moléculaire s'exerce d'une manière énergique, et les mouvements sont modifiés; il y a, comme on dit, choc des deux molécules.

Considérons d'abord deux molécules égales m et m' (*fig.* 33),

Fig. 33.

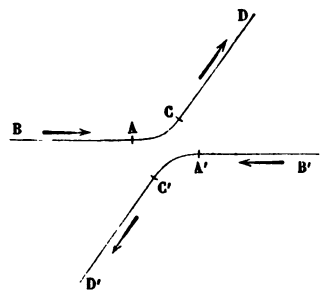


marchant en sens contraires sur une même droite, avec la

vitesse u. Quand les molécules sont à une distance très-petite AA′, la force moléculaire commence à agir d'une manière efficace; comme il y a répulsion, la vitesse diminue peu à peu et devient nulle à la distance BB′; les molécules s'éloignent ensuite l'une de l'autre, et reprennent leur vitesse primitive u à la distance AA′, mais en sens inverse. Les molécules ont ainsi échangé leurs vitesses, et tout se passe comme si elles s'étaient pénétrées sans action réciproque; les chocs qui se produisent n'ont donc aucune influence sur l'état général du gaz.

Considérons maintenant deux molécules marchant suivant des droites différentes BA, B′A′, et passant très-près l'une de l'autre; l'action réciproque devient sensible à partir de la position A, A′ (*fig.* 34), chaque molécule décrit alors une petite

Fig. 34.



courbe, et s'échappe ensuite suivant une autre ligne droite. Ces chocs ne changent pas la somme des forces vives, et comme il y a des molécules qui se meuvent dans tous les sens, il est clair que l'état général du système n'est pas modifié.

En résumé, la trajectoire de chaque molécule est formée d'une série de lignes droites disposées en zigzag, et réunies les unes aux autres par des courbes de raccordement très-petites par rapport aux portions rectilignes.

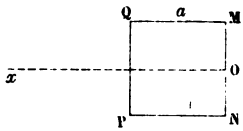
EXPLICATION DE LA PRESSION.

139. Dans cette manière d'envisager les gaz, la pression qu'un gaz exerce contre la paroi du vase qui le contient est due aux chocs répétés des molécules contre la paroi. Quand une molécule arrive dans le voisinage de la paroi, des forces répulsives s'exercent entre cette molécule et celles de la paroi; elles détruisent bientôt la vitesse normale de la molécule, et lui impriment une vitesse égale et contraire. A cause de la multiplicité des chocs, l'ensemble produit l'effet d'une pression continue.

On trouve la première idée de cette hypothèse sur la constitution des gaz dans l'*Hydrodynamique* de J. Bernoulli, publiée en 1738; elle a été reprise par Krönig de Berlin en 1856, et M. Clausius lui a donné de grands développements.

Voici comment Krönig explique la pression. Considérons une certaine masse de gaz renfermée dans un petit cube MNPQ, dont l'arête est a (*fig.* 35); soit n le nombre des molécules du gaz. Krönig imagine toutes les molécules partagées en trois groupes de $\frac{n}{3}$ molécules, se mouvant parallèlement aux arêtes avec une même vitesse u; la pression exercée sur la face MN sera produite par le choc des $\frac{n}{3}$ molécules, dont la vitesse est normale à cette face.

Fig. 35.



Si l'on appelle f la réaction de la paroi sur une molécule m, et si l'on compte les vitesses positives dans le sens ox, on a $m\frac{du}{dt}=f$, ou $m\,du=f\,dt$. Avant le choc la vitesse était $-u$, après le choc elle est $+u$; en intégrant pendant la durée du

choc, on a

$$2mu = \int f dt.$$

Voilà ce que donne un choc en particulier. En faisant la somme des équations pareilles relatives à tous les chocs qui se produisent contre la paroi MN pendant un certain temps θ, on obtient l'équation

$$\sum 2mu = \sum \int f dt.$$

Si l'on appelle N le nombre de ces chocs, on a

$$\sum 2mu = 2mu \times N.$$

D'autre part, si l'on pose

$$F\theta = \sum \int f dt,$$

F désignera la réaction moyenne que la paroi exerce sur l'ensemble des molécules. L'équation précédente devient ainsi

$$2mu \times N = F\theta.$$

Il est aisé d'évaluer le nombre des chocs : après le premier choc contre la face MN, la molécule m, marchant dans le sens ox, vient choquer la face opposée PQ, reprend sa vitesse primitive, choque de nouveau la face MN, et ainsi de suite. L'intervalle de temps qui s'écoule entre deux chocs consécutifs d'une molécule contre la face MN étant égal à $\frac{2a}{u}$, le nombre des chocs d'une même molécule contre cette face pendant le temps θ est $\frac{\theta u}{2a}$; le nombre N des chocs produits par le système des $\frac{n}{3}$ molécules dont la vitesse est normale à la face MN est $\frac{\theta u}{2a} \times \frac{n}{3}$, et l'équation devient

$$\frac{nmu^2\theta}{3a} = F\theta;$$

on en déduit

$$F = \frac{nmu^2}{3a}. \tag{1}$$

Si l'on appelle p la pression exercée sur un mètre carré, on a

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{nmu^2}{3a^3},$$

et, par suite,

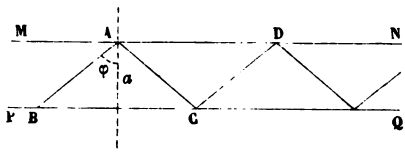
$$pv = \frac{nmu^2}{3}, \tag{2}$$

v étant le volume du cube.

140. M. Clausius est arrivé au même résultat sans être obligé de partager les molécules en trois groupes marchant dans trois directions perpendiculaires entre elles.

Considérons un grand volume de gaz, et deux plans parallèles MN et PQ (*fig.* 36) très-voisins et très-étendus; suppo-

Fig. 36.



sons qu'il y ait entre ces deux plans n molécules marchant dans toutes les directions. Une molécule, se mouvant dans la direction BA, choque le plan MN au point A, se réfléchit sur le plan PQ en C pour venir choquer de nouveau le plan MN en D, et ainsi de suite. Appelons a la distance des deux plans, et φ l'angle que fait la droite AB avec la normale au plan. Le chemin parcouru par cette molécule entre deux chocs consécutifs sur MN est $\frac{2a}{\cos\varphi}$, et l'intervalle de temps entre les deux chocs $\frac{2a}{u\cos\varphi}$, de sorte que le nombre des chocs de la molécule pendant le temps θ est

$$\frac{\theta u \cos\varphi}{2a}.$$

Si l'on appelle u' la projection de la vitesse de la molécule sur la normale au plan, et si l'on désigne, comme précédemment, par f la réaction du plan sur cette molécule, on a $m\frac{du'}{dt}=f$, ou $mdu'=fdt$, et, en intégrant pendant la durée du choc,

$$2mu'=2mu\cos\varphi=\int fdt.$$

En ajoutant les équations pareilles relatives à tous les chocs qui se produisent contre le plan MN pendant le temps θ, on obtient l'équation

$$\sum 2mu\cos\varphi=\sum fdt=\mathrm{F}\theta,$$

F étant la réaction moyenne du plan sur l'ensemble des molécules. Nous avons vu que le nombre des chocs d'une molécule est $\frac{\theta u\cos\varphi}{2a}$; cette molécule introduit donc dans le premier membre la quantité

$$2mu\cos\varphi\times\frac{\theta u\cos\varphi}{2a}=\frac{mu^2\cos^2\varphi}{a}\theta,$$

et l'équation devient

$$\sum\frac{mu^2\cos^2\varphi}{a}\theta=\mathrm{F}\theta,$$

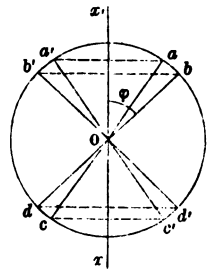
le signe $\sum$ s'étendant ici aux diverses molécules. On en déduit

$$\mathrm{F}=\sum\frac{mu^2\cos^2\varphi}{a}. \tag{3}$$

Pour évaluer cette somme, M. Clausius suppose que toutes les molécules ont la même masse et la même vitesse, et se meuvent indifféremment dans tous les sens. D'un point quelconque comme centre décrivons une sphère avec un rayon égal à l'unité (*fig.* 37); menons des rayons parallèles aux directions de toutes les vitesses; ces rayons couperont la surface en une infinité de points régulièrement distribués sur la sphère. Toutes les vitesses, dont les directions font avec la normale xx' aux deux plans des angles compris entre φ et $\varphi+d\varphi$,

couperont la sphère sur les zones opposées $abab'$, $cdc'd'$, comprises entre deux cônes circulaires menés du centre de la

Fig. 37.



sphère autour de la droite xx' et ayant pour demi-angles au sommet φ et $\varphi + d\varphi$. Comme il y a n molécules entre les deux plans, le nombre total de points déterminés sur la sphère sera aussi n, et le rapport du nombre n' des molécules qui correspondent à ces deux zones au nombre total n est égal au rapport de la surface des deux zones à celle de la sphère; on a donc

$$\frac{n'}{n} = \frac{2.2\pi \sin\varphi\, d\varphi}{4\pi} = \sin\varphi\, d\varphi,$$

$$n' = n \sin\varphi\, d\varphi.$$

Chacune de ces n' molécules introduisant dans la somme (3) un terme

$$\frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a},$$

les n' molécules donneront

$$n' \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a} = \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a}\, n \sin\varphi\, d\varphi.$$

Pour obtenir l'action de toutes les molécules qui correspondent à la surface entière de la sphère, il suffit d'intégrer cette expression entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$; l'équation (3) devient alors

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a}\, n \sin\varphi\, d\varphi = \frac{nmu^2}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi.$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3};$$

on a donc

$$(1) \qquad F = \frac{nmu^2}{3a}.$$

En appelant ω la surface de chacun des plans et v le volume du gaz qu'ils renferment, on a

$$p = \frac{F}{\omega} = \frac{nmu^2}{3a\omega};$$

d'où

$$(2) \qquad pv = \frac{nmu^2}{3}.$$

141. On a supposé dans cette démonstration que les molécules ont des masses égales, ce qui n'a pas lieu pour un mélange de gaz, et que toutes les vitesses sont égales, hypothèse qui n'est nullement justifiée; mais on peut modifier la démonstration de M. Clausius de manière à s'affranchir de ces hypothèses.

En effet, on a toujours l'équation

$$(3) \qquad F = \sum \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a}.$$

Pour évaluer la somme des termes qui forment le second membre, nous ferons intervenir les forces vives des molécules, au lieu de leur nombre. La force vive d'une molécule est $\frac{mu^2}{2}$. La somme $\sum_1 \frac{mu^2}{2}$ des forces vives des molécules dont les vitesses correspondent aux zones déterminées par les angles φ et $\varphi + d\varphi$ est à la somme $\sum \frac{mu^2}{2}$ des forces vives de toutes les molécules, somme que nous désignerons par V_n, dans le rapport de la surface des deux zones à la surface totale de la sphère; on a donc

$$\frac{\sum_1 \frac{mu^2}{2}}{\sum \frac{mu^2}{2}} = \frac{2.2\pi \sin\varphi \, d\varphi}{4\pi} = \sin\varphi \, d\varphi,$$

ou

$$\sum_1 \frac{mu^2}{2} = V_u \times \sin\varphi \, d\varphi.$$

Les vitesses contenues dans la première somme font sensiblement le même angle φ avec la normale; si l'on multiplie chacun des termes de cette somme par le facteur constant $\frac{2}{a}\cos^2\varphi$, on a

$$\sum_1 \frac{mu^2 \cos^2\varphi}{a} = V_u \times \frac{2}{a} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi.$$

Telle est la partie introduite dans F par les molécules dont les vitesses correspondent aux deux zones considérées; pour avoir la somme entière, il faut intégrer de o à $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$F = \frac{2}{a} V_u \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi,$$

ou

$$F = \frac{2}{3a} V_u;$$

on en déduit la relation générale

$$(4) \qquad pv = \frac{2}{3} V_u = \frac{2}{3} \sum \frac{mu^2}{2}:$$

Le produit du volume d'une masse de gaz par la pression qu'elle supporte est égal aux $\frac{2}{3}$ de la somme des forces vives du mouvement de translation de toutes les molécules.

Dans cette démonstration, nous avons suivi le mouvement de chaque molécule sans tenir compte des chocs qui se produisent entre les molécules; mais, comme nous l'avons déjà remarqué au n° 138, ces chocs des molécules entre elles ne modifient pas l'état général du système.

Si m est la masse d'une molécule, et n le nombre des molécules, $\sum m$ est la masse totale, et $\frac{\sum m}{n}$ la masse moyenne

m_1 des molécules. On peut définir la vitesse moyenne en imaginant un gaz homogène formé de n molécules de masse m_1 animées de la même vitesse u_1, et dont la force vive serait égale à la somme des forces vives du gaz considéré, ce qui donne la condition

$$n\frac{m_1 u_1^2}{2} = \sum \frac{mu^2}{2},$$

et ramène l'équation (4) à la forme (2)

$$pv = \frac{nm_1 u_1^2}{3}.$$

LOI DE MARIOTTE. — LOI DES MÉLANGES.

142. D'après les expériences de M. Joule, quand on fait varier le volume d'un gaz sans travail extérieur, la température ne change pas; d'ailleurs la force vive reste la même; on en conclut que la température d'un gaz dépend uniquement de sa force vive; l'équation (4) montre que, *si la force vive d'un gaz reste constante, c'est-à-dire si la température ne change pas, la pression exercée par le gaz est en raison inverse du volume qu'il occupe.* C'est la loi de Mariotte.

La loi des mélanges résulte de la même équation. Considérons en effet deux gaz différents : appelons $\sum \frac{m' u'^2}{2}$ et $\sum \frac{m'' u''^2}{2}$ les forces vives du mouvement de translation des molécules dans ces deux gaz, et supposons qu'on les mélange sans travail extérieur, comme dans les expériences de M. Joule. Si les gaz n'exercent pas l'un sur l'autre d'action chimique, la force vive du mélange sera égale à la somme des forces vives des gaz mélangés, et l'on aura

$$\sum \frac{mu^2}{2} = \sum \frac{m' u'^2}{2} + \sum \frac{m'' u''^2}{2}.$$

Si le premier gaz occupait seul le volume v du mélange, il

exercerait une pression p' donnée par l'équation

$$p'v = \frac{2}{3}\sum\frac{m'u'^2}{2}.$$

De même, si le second gaz occupait seul le même volume, il exercerait une pression p'' donnée par l'équation

$$p''v = \frac{2}{3}\sum\frac{m''u''^2}{2}.$$

Or, en appelant p la pression exercée par le mélange, on a

$$pv = \frac{2}{3}\sum\frac{mu^2}{2}.$$

On en déduit la relation

$$pv = p'v + p''v,$$

ou

$$(5) \qquad p = p' + p''.$$

La pression du mélange est égale à la somme des pressions qu'exerceraient les gaz mélangés, si chacun d'eux occupait seul le volume du mélange.

143. L'équation (4) conduit encore à une autre conséquence très-importante. Si on la combine avec l'équation

$$(6) \qquad pv = \alpha p_0 v_0 T,$$

que l'on déduit des lois de Mariotte et de Gay-Lussac, on obtient la relation

$$(7) \qquad \sum\frac{mu^2}{2} = \frac{3}{2}\alpha p_0 v_0 T;$$

elle signifie que *la force vive du mouvement de translation des molécules d'un gaz est proportionnelle à la température absolue.*

On peut mettre l'équation (7) sous la forme

$$(8) \qquad \frac{\sum\frac{mu^2}{2}}{v_0} = \frac{3}{2}\alpha p_0 T;$$

on en conclut que *le rapport de la force vive de l'unité de poids au volume spécifique est égal à la température absolue multipliée par un facteur qui est le même pour tous les gaz.*

144. M. Clausius a cherché à calculer la vitesse de translation elle-même; en désignant par u_1 la vitesse moyenne des molécules, comme nous l'avons définie au n° **141**, on a, en vertu de l'équation (6),

$$\frac{n m_1 u_1^2}{3} = \alpha p_0 v_0 T.$$

Considérons une masse de gaz pesant 1 kilogramme; nous aurons

$$n m_1 = \sum m = \frac{1}{g},$$

et l'équation précédente donnera

$$(9) \qquad u_1 = \sqrt{3 g \alpha p_0 v_0 T}.$$

Les constantes α, p_0, g ont pour valeurs

$$\alpha = \frac{1}{273}, \quad p_0 = 10\,333, \quad g = 9{,}8096;$$

pour l'air atmosphérique, $v_0 = 0{,}7733$; en appelant ρ la densité d'un gaz par rapport à l'air, on a

$$v_0 = \frac{0{,}7733}{\rho}.$$

L'équation (9) devient ainsi

$$(10) \qquad u_1 = 485 \sqrt{\frac{T}{273 \rho}}.$$

Pour la température zéro, $T = 273$, et la formule se réduit à

$$u_1 = 485 \sqrt{\frac{1}{\rho}}.$$

En appliquant cette dernière formule, M. Clausius a trouvé les

résultats suivants :

Air.....	$u_1 = 485^m$,
Oxygène.....	$u_1 = 461^m$,
Azote.....	$u_1 = 492^m$,
Hydrogène.....	$u_1 = 1848^m$.

ÉNERGIE ACTUELLE D'UN GAZ.

145. Jusqu'ici nous avons considéré, dans nos raisonnements, des gaz absolument simples, c'est-à-dire des gaz dont les molécules seraient des atomes sans dimensions, ou, comme on dit en mécanique, des points matériels, centres de forces attractives ou répulsives. Mais les gaz réels, même ceux qu'en chimie on appelle *simples*, paraissent formés de molécules, dont chacune est la réunion de plusieurs atomes; dans ce cas, outre leur mouvement de translation, les molécules possèdent d'autres mouvements, elles tournent sur elles-mêmes, et les atomes qui composent chaque molécule vibrent dans l'intérieur de la molécule. Ces trois mouvements doivent exister simultanément. Imaginons, en effet, qu'à un certain moment chaque molécule soit animée seulement d'un mouvement de translation; les chocs des molécules entre elles produiront bientôt des mouvements de rotation des molécules sur elles-mêmes, et mettront les atomes en mouvement dans chaque molécule. Une partie de la force vive du mouvement de translation passera ainsi dans les autres mouvements, mais la force vive totale restera la même. Inversement, si outre un mouvement de translation très-lent, les molécules possédaient des rotations ou des vibrations intérieures très-rapides, il est clair que ces derniers mouvements exerceraient une influence pendant les chocs, de manière à augmenter la vitesse du mouvement de translation. On conçoit donc que, dans chaque état du gaz, il existe un rapport déterminé entre la force vive totale V et la force vive V_0 du mouvement de translation des molécules.

C'est le mouvement de translation seul qui produit la pres-

sion, et nous avons trouvé (n° 141) la relation

$$(4) \qquad pv = \frac{2}{3} V_u,$$

qui existe entre la pression et la force vive du mouvement de translation. Dans l'expérience de M. Joule, quand le volume du gaz varie sans travail extérieur, il est évident que l'énergie intérieure $U = V + W$ ne change pas; si effectivement le travail intérieur dans les gaz, comme on le suppose, est insensible, la force vive totale ou l'énergie actuelle V reste constante. Mais on ne voit pas théoriquement que, pendant cette transformation, l'énergie partielle V_u due aux mouvements de translation des molécules reste aussi constante; car les rotations ou les vibrations pourraient augmenter ou diminuer. Cependant, si le gaz que l'on considère suit la loi de Mariotte, pour que le produit pv conserve la même valeur, il est nécessaire que l'énergie partielle V_u reste elle-même constante.

Le mélange des gaz conduit à la même conséquence : si le mélange a lieu sans travail extérieur, et si, d'ailleurs, le travail intérieur est négligeable, la force vive totale du mélange est égale à la somme des forces vives totales des gaz mélangés. Pour obtenir la loi des pressions, il faut que la même relation ait lieu entre les forces vives relatives aux mouvements de translation, et par conséquent que la force vive des mouvements de rotation et de vibration ne change pas.

146. Les mouvements de translation des molécules des gaz suffisent, comme nous l'avons dit, pour expliquer les phénomènes de pression; mais dans les expériences de calorimétrie, il est nécessaire de considérer tous les mouvements ou la force vive totale V. Nous avons trouvé (n° 45) la relation $c = A\frac{dU}{dt}$; si $dW = 0$, cette équation devient $c = A\frac{dV}{dt}$ ou

$$(11) \qquad \frac{dV}{dT} = Ec.$$

La chaleur spécifique c étant indépendante de la température (n° 49), on en déduit

$$V = V_0 + EcT.$$

Il est naturel d'admettre qu'au zéro de la température absolue la force vive totale V_0 est nulle, comme celle du mouvement de translation (n° 143); on a alors

$$V = EcT. \tag{12}$$

Cette équation pourrait servir à définir théoriquement la température absolue.

En vertu de la relation $C - c = A\alpha p_0 v_0$ du n° 46, l'équation (7) du n° 143 devient

$$V_u = \frac{3}{2} E(C - c)T. \tag{13}$$

Des deux équations précédentes, on déduit

$$\frac{V_u}{V} = \frac{3}{2}\left(\frac{C}{c} - 1\right). \tag{14}$$

Dans les gaz simples, et dans les gaz composés formes sans condensation qui suivent sensiblement la loi de Mariotte, le rapport $\frac{C}{c}$ des chaleurs spécifiques a à peu près la même valeur 1,410; on en conclut que le rapport $\frac{V_u}{V}$ a la valeur constante 0,615. Ainsi dans tous les gaz que nous venons d'indiquer, il y a une partie notable de l'énergie totale, environ les quatre dixièmes, qui n'appartient pas au mouvement de translation des molécules. Ceci fait penser que les gaz que l'on appelle *simples*, comme l'hydrogène, l'oxygène, l'azote, etc., ne le sont pas en réalité.

Pour les gaz qui ne suivent pas la loi de Mariotte, et pour les gaz composés formés avec condensation, la valeur de $\frac{V_u}{V}$ est plus petite; elle est d'autant plus petite que la molécule du gaz est plus complexe. Dans ce cas, les mouvements de rotation des molécules et les mouvements vibratoires des atomes dans chaque molécule, entrent pour une plus grande part dans l'énergie totale du gaz.

Il résulte de ce qui précède que deux causes principales pa-

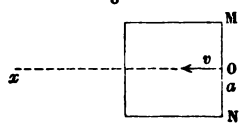
raissent empêcher les gaz réels de suivre rigoureusement les lois idéales des gaz parfaits : 1° le travail intérieur qui accompagne le changement de volume; 2° la composition des molécules et l'absorption d'une fraction variable de l'énergie par la rotation ou les vibrations intérieures des molécules.

TRANSFORMATION DU TRAVAIL EXTÉRIEUR EN ÉNERGIE CALORIFIQUE, OU INVERSEMENT.

147. On peut se rendre compte de la manière dont le travail extérieur, appliqué à un gaz, se transforme en énergie calorifique, ou inversement.

Considérons, en effet, une certaine masse de gaz remplissant un cube dont les arêtes sont égales à a, et dont une des parois MN (*fig.* 38) est formée par un piston mobile, auquel

Fig. 38.



est appliquée une force $F = \frac{nmu^2}{3a}$ égale à la pression du gaz, et supposons que le piston s'enfonce avec une vitesse v très-petite par rapport à u; le travail extérieur dépensé dans le temps très-petit θ est $Fv\theta$. Calculons l'accroissement d'énergie communiquée au gaz; reprenons, pour simplifier, le raisonnement de Krönig. Imaginons les molécules, disposées en trois groupes, se mouvant parallèlement aux arêtes d'un cube; rien ne sera changé dans le phénomène si nous imprimons à tout le système, c'est-à-dire au gaz et au vase qui le contient, une vitesse commune égale et contraire à celle du piston; alors le piston reste immobile; une molécule vient le choquer avec une vitesse relative $-(u+v)$; elle rebondit avec une vitesse relative $+(u+v)$; comme tout le système est animé de la vitesse commune v, la vitesse absolue de la molécule après le choc est $u+2v$; l'accroissement de force

vive est $\frac{m(u+2v)^2}{2} - \frac{mu^2}{2}$, approximativement $2muv$. Le nombre des chocs pour chaque molécule étant à peu près égal à $\frac{u\theta}{2a}$ dans le temps θ, l'accroissement de force vive pendant ce temps est $\frac{mu^2v\theta}{a}$ pour chaque molécule, soit $\frac{nmu^2v\theta}{3a}$ pour les $\frac{n}{3}$ molécules; cette quantité est égale au travail dépensé.

Inversement, si le piston s'éloigne, il y a diminution de force vive pendant le choc, et transformation d'une partie de l'énergie du gaz en travail extérieur.

ÉTAT SOLIDE ET ÉTAT LIQUIDE.

148. Il est probable que les molécules des corps solides sont formées d'un grand nombre d'atomes, de sorte que les dimensions des molécules ne sont plus très-petites par rapport à leurs distances mutuelles, et que l'action de deux molécules voisines se compose, non-seulement de deux forces égales et contraires appliquées aux centres de gravité des deux molécules, mais encore de deux couples ayant pour effet d'orienter les molécules, et de leur donner la disposition qui caractérise la forme solide. Les molécules d'un corps solide vibrent autour de leurs positions d'équilibre, sans s'en écarter beaucoup; outre ce mouvement vibratoire du centre de gravité de la molécule, il y a lieu de considérer un mouvement oscillatoire de la molécule autour de son centre de gravité, et aussi les vibrations intérieures des atomes qui la constituent.

L'état liquide paraît intermédiaire entre l'état solide et l'état gazeux; les molécules n'ont plus de positions d'équilibre déterminées comme dans les solides; cependant elles ne s'écartent pas assez les unes des autres pour que les forces moléculaires deviennent insensibles comme dans les gaz. Concevons d'abord que le mouvement oscillatoire de la molécule autour de son centre de gravité, en s'accélérant, devienne un mouvement de rotation continu, l'influence de la forme des molé-

cules disparaîtra en grande partie : c'est ce qui paraît avoir lieu dans les liquides. Dans ce cas, ce qu'on appelle *chaleur latente de fusion* consisterait principalement dans l'énergie du mouvement de rotation des molécules. En second lieu, la vitesse de translation des molécules n'a pas une valeur assez grande pour séparer en quelque sorte les molécules les unes des autres; les forces moléculaires ayant toujours un effet sensible, le mouvement d'une molécule n'est pas rectiligne et uniforme; une molécule, après être restée dans le voisinage d'un groupe de molécules, peut s'en écarter, et, attirée par un second groupe, venir occuper une position semblable dans ce second groupe.

VAPORISATION.

149. M. Clausius a cherché à expliquer la vaporisation de la manière suivante. Les vitesses de translation des molécules sont probablement très-variables dans un même liquide; une molécule, traversant la surface libre du liquide dans des circonstances favorables, peut sortir de la sphère d'attraction des molécules voisines, et s'échapper en ligne droite dans l'espace situé au-dessus du liquide. Supposons cet espace limité par des parois et vide au commencement; les molécules qui s'échappent ainsi forment une vapeur analogue à un gaz, et remplissent cet espace. Les molécules rebondissent contre les parois, se choquent entre elles, et viennent rencontrer la surface du liquide : les unes rebondissent, d'autres pénètrent par les pores et rentrent dans l'intérieur. Il s'établit ainsi un état d'équilibre, dans lequel le nombre des molécules qui entrent est égal au nombre de celles qui sortent. La densité maximum de la vapeur dépend de la vitesse moyenne des molécules, et par conséquent de la température.

Lorsqu'un liquide se vaporise, il est clair que les molécules qui sortent en plus grande abondance sont celles qui sont animées de la plus grande vitesse; d'après cela, la force vive moyenne des molécules qui restent devient moindre, et par conséquent la température du liquide s'abaisse; pour con-

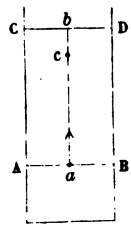
server au liquide sa température primitive, il faut lui fournir une certaine quantité de chaleur; c'est là ce que l'on appelle *chaleur latente de vaporisation.*

Un gaz situé dans l'espace placé au-dessus du liquide n'empêche pas la vaporisation, mais la rend seulement plus lente. Quand une molécule, s'échappant de la surface, rencontre une molécule de gaz dans le voisinage, elle peut rebrousser chemin et rentrer dans le liquide; il se formera donc pendant l'unité de temps un nombre moindre de molécules de vapeur que si l'espace était vide de gaz. Il en est encore de même au retour de la vapeur vers le liquide; les chocs produits par le gaz empêchent un certain nombre de molécules de rentrer dans le liquide. Comme les chances de choc sont les mêmes à l'entrée et à la sortie des molécules, les échanges qui ont lieu entre le liquide et la vapeur seront diminués dans le même rapport, et l'équilibre aura encore lieu pour la même densité de vapeur que si le liquide était en présence d'un espace complétement vide de gaz; seulement l'équilibre sera plus lent à s'établir.

FORMATION DES VAPEURS DANS UN ESPACE ILLIMITÉ.

150. Considérons un tube ABCD (*fig.* 39) de très-grande

Fig. 39.



longueur, vide de gaz, et renfermant un liquide à sa partie inférieure. Quand une molécule de liquide s'échappe verticalement avec une vitesse u, sa vitesse diminue graduellement sous l'action de la pesanteur; elle s'élève à la hauteur $h = \frac{u^2}{2g}$, puis elle retombe. Si dans sa chute elle rencontre en c

une autre molécule qui monte après elle, les vitesses étant les mêmes, la première molécule sera renvoyée de bas en haut avec la même vitesse, et elle remontera en b à la même hauteur h. La vapeur ne dépassera donc pas un certain niveau CD, et il se formera sur le liquide une atmosphère de densité décroissante.

151. Les mêmes considérations peuvent être appliquées aux gaz et expliquent très-bien la limitation de l'atmosphère. Si l'on appelle u la vitesse des molécules d'air à la surface de la terre, la hauteur maximum à laquelle elles puissent s'élever est donnée par la formule

$$h = \frac{u^2}{2g},$$

l'intensité de la pesanteur étant supposée constante. En remplaçant u par sa valeur donnée par l'équation (8), n° 144, on a

$$h = \frac{3}{2}\alpha p_0 v_0 T. \tag{16}$$

Si la couche inférieure est à la température de la glace fondante, $h = \frac{3}{2} p_0 v_0 = 12000$ mètres.

Divers phénomènes nous apprennent que cette hauteur est trop faible; mais nous avons supposé, dans le calcul, que la molécule de gaz qui s'élevait du sol ne recevait en chemin aucune communication d'énergie extérieure, tandis qu'en réalité les rayons solaires fournissent constamment au gaz de l'énergie calorifique. La limite supérieure de l'atmosphère est donc plus élevée; mais le calcul fait voir que cette limite doit exister.

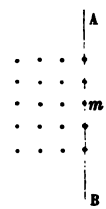
PROPAGATION DES VIBRATIONS DANS LES GAZ.

152. Nous avons admis (n° 138) que la trajectoire d'une molécule de gaz est formée de parties rectilignes, reliées par des parties courbes dues à l'action des molécules qu'elle ren-

contre, et très-petites par rapport aux parties rectilignes; mais ces parties rectilignes elles-mêmes sont très-petites, malgré la grande vitesse de translation des gaz, parce que les chocs sont très-fréquents. Il en résulte que l'ensemble est un état vibratoire irrégulier, chaque molécule se mouvant en zigzag dans un très-petit espace. L'état général est le même que si les molécules étaient immobiles et se repoussaient suivant une certaine fonction de la distance et de la température; cette répulsion permanente entre les molécules supposées immobiles remplace celle qui s'exerce en réalité d'une manière intermittente au moment des chocs. On rend compte de la loi de Mariotte en supposant que cette force répulsive idéale varie en raison inverse de la distance, avec un coefficient qui dépend de la température du gaz.

Concevons que les molécules du gaz soient distribuées régulièrement suivant trois directions rectangulaires, et soit a le côté d'un cube élémentaire aux sommets duquel sont situées des molécules. La résultante des actions répulsives de toutes les molécules situées à gauche du plan AB (*fig.* 40)

Fig. 40.



sur une molécule m située dans ce plan, est perpendiculaire au plan, et on peut la représenter par

$$F = \frac{km^2}{a},$$

le coefficient k étant fonction de la température, et indépendant de la distance moléculaire a. En effet, si la distance a devient double, toutes les distances deviennent doubles, et les forces moléculaires moitié moindres, ainsi que leur résultante F; cette résultante varie donc en raison inverse de a.

Sur une surface de 1 mètre carré, le nombre des molécules étant $\frac{1}{a^2}$, la pression que supporte cette surface est

$$p = F \times \frac{1}{a^2} = \frac{km^2}{a^3};$$

on a donc

$$pa^3 = km^2.$$

Considérons une masse gazeuse pesant 1 kilogramme, et enfermée dans un cube dont le côté est b; le nombre des molécules est $n = \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{v}{a^3}$. D'ailleurs on a $nmg = 1$; la relation précédente devient

$$pv = \frac{km}{g}:$$

c'est la loi de Mariotte. Pour retrouver la loi de Gay-Lussac, il suffit de supposer que le coefficient k est proportionnel à la température absolue T.

Laplace avait déjà montré que cette hypothèse des répulsions moléculaires inversement proportionnelles aux distances satisfait à la loi de Mariotte.

153. Cette conception d'un milieu idéal formé de molécules immobiles dans leurs positions d'équilibre, et exerçant les unes sur les autres des forces fonctions de la distance, sert de base à la théorie des ondulations. Le calcul indique que, s'il y a un centre d'ébranlement dans un pareil milieu, les vibrations se régularisent à mesure qu'on s'éloigne du centre d'ébranlement. Si le milieu est isotrope, elles se partagent en vibrations longitudinales et en vibrations transversales, se propageant avec des vitesses différentes, de sorte que les deux espèces d'ondes sont séparées l'une de l'autre. On voit aussi que, si la force moléculaire est inversement proportionnelle à la distance des molécules, les vibrations transversales ne peuvent se propager; il n'y a donc dans l'air que des vibrations longitudinales. Les forces moléculaires doivent suivre une loi différente dans l'éther, puisque ce milieu transmet les vibrations transversales auxquelles on attribue les phénomènes

lumineux. D'après cela, la nouvelle théorie des gaz ne détruit pas les anciens travaux sur la propagation du son; elle donne seulement une autre signification aux lois élémentaires qui ont servi de base à ces calculs.

LOIS DE COMBINAISON DES GAZ.

154. On a observé que deux gaz simples se combinent entre eux dans un rapport simple de volumes, et que si le composé est gazeux, il existe aussi un rapport simple entre le volume du gaz obtenu et celui des gaz combinés. On a été amené d'après cela à penser que *des volumes égaux de gaz simples, à la même température et sous la même pression, renferment le même nombre de molécules.* Voyons les conséquences qui résultent de cette hypothèse.

Considérons deux gaz différents, qui, à la même température, occupent le même volume sous la même pression, on aura, pour le premier,

$$pv = \frac{n m u^2}{3},$$

et, pour le second,

$$pv = \frac{n' m' u'^2}{3}.$$

Si l'on a $n = n'$, comme on l'a supposé, il en résulte

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{m' u'^2}{2}.$$

On en conclut que, *lorsque deux gaz simples sont à la même température, la force vive de translation d'une molécule est la même dans l'un et l'autre gaz.* On dira donc que deux gaz sont à la même température quand leurs molécules possèdent la même force vive de translation. Cette force vive étant, en outre, proportionnelle à la température absolue, on posera

$$\frac{mu^2}{2} = \lambda T,$$

λ étant une constante.

Nous avons vu (n° 146) que, dans les gaz simples, la force vive du mouvement de translation est une même fraction constante de la force vive totale. Ainsi, *lorsque deux gaz simples sont à la même température, la force vive totale d'une molécule est la même; cette force vive totale est aussi proportionnelle à la température absolue.*

155. Considérons maintenant les gaz composés. Prenons pour exemples les deux oxydes d'azote, dont la composition est la suivante :

1 vol. d'oxygène + 1 vol. d'azote
donnent 2 vol. de bioxyde d'azote.

1 vol. d'oxygène + 2 vol. d'azote
donnent 2 vol. de protoxyde d'azote.

On admet qu'une molécule de bioxyde d'azote est formée d'une molécule d'oxygène et d'une molécule d'azote; qu'une molécule de protoxyde est formée d'une molécule d'oxygène et de deux molécules d'azote. Si donc on appelle n le nombre des molécules contenues dans l'unité de volume des gaz simples, les combinaisons précédentes seront représentées par les formules

$$\text{Bioxyde}\ldots\ldots\ldots \quad nO + nAz = n(OAz),$$
$$\text{Protoxyde}\ldots\ldots \quad nO + 2nAz = n(OAz^2).$$

A la même température et sous la même pression, deux volumes égaux de ces gaz composés contiennent encore le même nombre de molécules, et par conséquent la force vive de translation d'une molécule est la même.

Mais cette loi ne concorde plus avec celle des gaz simples; car s'il y a n molécules dans un volume d'oxygène, il y aurait n molécules dans les deux volumes de bioxyde d'azote, et par conséquent $\frac{n}{2}$ molécules dans un volume; la force vive d'une molécule de bioxyde serait double de celle d'une molécule d'oxygène.

Pour généraliser la loi des gaz simples, M. Clausius suppose que dans les corps simples chaque molécule est formée de la réu-

nion de deux molécules égales électrisées, l'une positivement, l'autre négativement, et que la combinaison des deux gaz est précédée d'une double décomposition. Si donc on représente par $\dot{O}\dot{O}$ la molécule d'oxygène, et par $\dot{A}z\dot{A}z$ celle d'azote, les deux réactions seront figurées ainsi qu'il suit :

Bioxyde d'azote..... $n(\dot{O}\dot{O}) + n(\dot{A}z\dot{A}z) = 2n(\dot{O}\dot{A}z)$,

Protoxyde d'azote.... $n(\dot{O}\dot{O}) + 2n(\dot{A}z\dot{A}z) = 2n(\dot{O}\ddot{A}z)$.

De cette manière l'unité de volume des gaz composés renfermera n molécules.

Voici d'autres exemples.

L'acide chlorhydrique est l'analogue du bioxyde d'azote; un volume de chlore et un volume d'hydrogène donnent deux volumes d'acide chlorhydrique :

$$n(\dot{C}l\dot{C}l) + n(\dot{H}\dot{H}) = 2n(\dot{C}l\dot{H});$$

un volume du composé renferme n molécules.

L'eau est l'analogue du protoxyde d'azote; un volume d'oxygène et deux d'hydrogène donnent deux volumes de vapeur d'eau :

$$n(\dot{O}\dot{O}) + 2n(\dot{H}\dot{H}) = 2n(\dot{O}\ddot{H}).$$

L'acide sulfhydrique est analogue au protoxyde d'azote et à l'eau, grâce à la densité de la vapeur de soufre trouvée par MM. H. Sainte-Claire Deville et Troost; un volume de vapeur de soufre et deux volumes d'hydrogène forment deux volumes d'acide sulfhydrique :

$$n(\dot{S}\dot{S}) + 2n(\dot{H}\dot{H}) = 2n(\dot{S}\ddot{H}).$$

Un volume d'azote et trois volumes d'hydrogène forment deux volumes d'ammoniaque :

$$n(\dot{A}z\dot{A}z) + 3n(\dot{H}\dot{H}) = 2n(\dot{A}z\dddot{H}).$$

Mais l'hypothèse de M. Clausius est insuffisante pour rendre compte de combinaisons plus complexes; ainsi deux volumes d'acide chlorhydrique et deux volumes d'ammoniaque forment quatre volumes de chlorhydrate d'ammoniaque. Les formules

précédentes donneraient :

$$2n(\dot{\mathrm{Cl}}\ddot{\mathrm{H}}) + 2n(\dot{\mathrm{Az}}\,\dddot{\mathrm{H}}) = 2n(\dot{\mathrm{Cl}}\,\dot{\mathrm{Az}}\,\dddot{\mathrm{H}}),$$

savoir : deux volumes du composé au lieu de quatre. Pour rétablir l'analogie, il faudrait admettre que les molécules des gaz simples sont formées de quatre atomes; les formules de l'acide chlorhydrique et de l'ammoniaque seraient alors :

$$n(\ddot{\mathrm{Cl}}\,\ddot{\mathrm{Cl}}) + n(\ddot{\mathrm{H}}\ddot{\mathrm{H}}) = 2n(\ddot{\mathrm{Cl}}\,\ddot{\mathrm{H}}),$$
$$n(\ddot{\mathrm{Az}}\ddot{\mathrm{Az}}) + 3n(\ddot{\mathrm{H}}\ddot{\mathrm{H}}) = 2n(\ddot{\mathrm{Az}}\mathrm{H}^4),$$

et l'on aurait pour la formation du chlorhydrate d'ammoniaque :

$$2n(\ddot{\mathrm{Cl}}\ddot{\mathrm{H}}) + 2n(\ddot{\mathrm{Az}}\mathrm{H}^4) = 4n(\dot{\mathrm{Cl}}\dot{\mathrm{Az}}\mathrm{H}^4).$$

Le sulfhydrate présente la même difficulté.

On pourrait ainsi généraliser la loi et dire qu'*à la même température et sous la même pression, des volumes égaux de tous les gaz contiennent le même nombre de molécules.*

On conclurait de là qu'*à la même température, la force vive de translation d'une molécule est la même et qu'elle est proportionnelle à la température absolue.* On aurait ainsi $\frac{mu^2}{2} = \lambda T$, λ étant une même constante pour tous les gaz.

Mais la force vive totale d'une molécule ne serait pas la même, parce que le rapport de la force vive de translation à la force vive totale n'est pas le même dans tous les gaz composés; la force vive totale d'une molécule à la même température serait d'autant plus grande que la molécule est plus complexe.

LOI DE DULONG ET PETIT.

156. Dulong et Petit ont trouvé que, pour la plupart des corps simples, solides ou liquides, la chaleur spécifique est en raison inverse de l'équivalent chimique, ou bien que le produit de la chaleur spécifique d'un corps par son équivalent est un nombre constant. On peut en juger par les nombres sui-

vants :

	C	e	eC
Fer.....	0,1138	28	3,1864
Zinc.....	0,0755	32,75	3,1276
Cadmium.....	0,0567	56	3,1752
Plomb.....	0,0316	103,75	3,2599.

Si l'on suppose que le poids d'une molécule d'un corps soit proportionnel à son équivalent chimique, il résulte de cette loi que la capacité calorifique d'une molécule est constante pour tous les corps simples. Par suite, la force vive d'une molécule à une même température est la même pour tous les corps simples liquides ou solides, comme pour les gaz simples. Il y a bien quelques métaux qui semblent ne pas se conformer à cette loi; ainsi on a pour l'argent et le potassium :

	C	e	eC
Argent.....	0,0570	108	6,156
Potassium.....	0,1696	39	6,574

On peut remarquer qu'il suffirait de prendre pour équivalent de ces métaux la moitié de leur équivalent chimique ordinaire pour les faire rentrer dans la règle générale; les oxydes auraient alors l'une des deux formes OZn, OK^2, selon qu'ils appartiennent à l'une ou à l'autre des deux catégories. Il y a d'ailleurs des raisons puisées dans la Chimie et la Cristallographie qui sont d'accord avec cette manière de considérer les équivalents fondés uniquement sur les chaleurs spécifiques.

En résumé, si l'on choisit convenablement les équivalents chimiques et qu'on les rapporte à l'hydrogène pris pour unité, le produit de la chaleur spécifique d'un corps simple par son équivalent est un nombre sensiblement constant et égal à 3,2.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉLECTRICITÉ.

CHAPITRE I.

ÉLECTROSTATIQUE.

Loi de Coulomb. — Définition du potentiel. — Potentiel d'une couche sphérique homogène. — Cas où le point attiré est situé à l'intérieur de la masse agissante. — Surfaces de niveau. — Théorème fondamental. — Équilibre électrique dans un système de corps parfaitement conducteurs. — Distribution de l'électricité sur une sphère et sur un ellipsoïde.

LOI DE COULOMB.

157. Pour énoncer la loi des attractions et des répulsions électriques, on a imaginé deux fluides que l'on suppose répandus d'une manière continue dans les corps. Un corps n'est pas électrisé lorsque chaque élément de volume contient des quantités égales des deux fluides : le corps est électrisé lorsque l'un des fluides est en excès; cette différence constitue ce qu'on appelle l'*électricité libre dans le corps*. L'action mutuelle de deux masses infiniment petites m, m' d'électricité libre est une force dirigée suivant la droite qui les joint; elle est répulsive ou attractive suivant que les deux masses électriques sont de même espèce ou d'espèces contraires; elle varie en raison inverse du carré de la distance r : on peut donc la représenter par la formule

$$-\frac{mm'}{r^2},$$

en regardant la force comme positive ou négative suivant qu'elle est attractive ou répulsive, et prenant pour unité de masse électrique une masse telle, qu'une masse égale et de signe contraire, placée à l'unité de distance, exerce sur elle une attraction égale à l'unité. Telle est la loi de Coulomb, qui comprend, comme nous le verrons, l'ensemble des phénomènes d'électricité statique.

158. Considérons une masse électrique infiniment petite m, soumise à l'action de plusieurs masses infiniment petites m', m'',.... Appelons x, y, z les coordonnées du point m; x', y', z' celles du point m', etc.; désignons par a, b, c les cosinus des angles que fait la droite mm' avec les axes; la résultante des actions exercées sur la masse m par les autres masses aura pour projections sur les trois axes des coordonnées

$$X = -m\sum\frac{m'a}{r^2},\quad Y = -m\sum\frac{m'b}{r^2},\quad Z = -m\sum\frac{m'c}{r^2}.$$

Si l'on suppose la masse m égale à l'unité, et si l'on représente par dq l'une quelconque des masses m', m'',... d'électricité libre répandue sur un corps ou un système de corps, on aura

$$(1)\quad X = -\sum\frac{a\,dq}{r^2},\quad Y = -\sum\frac{b\,dq}{r^2},\quad Z = -\sum\frac{c\,dq}{r^2}.$$

Ces formules représentent l'action exercée par un système de corps électrisés sur une masse 1 d'électricité positive, placée en un point P de l'espace. Il suffit évidemment de tenir compte de l'électricité libre; car une certaine quantité de fluide neutre, étant la réunion de deux masses égales $+dq$ et $-dq$ d'électricités contraires, n'exerce aucune action sur le point P.

DÉFINITION DU POTENTIEL.

159. Les trois sommes précédentes peuvent être ramenées à une même somme. On a en effet

$$a = \frac{x'-x}{r},\quad b = \frac{y'-y}{r},\quad c = \frac{z'-z}{r},$$
$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2.$$

La distance r et les cosinus a, b, c étant des fonctions des coordonnées x, y, z du point P, les composantes X, Y, Z de la force exercée sur le point P sont des fonctions des trois variables indépendantes x, y, z. En différentiant par rapport à la variable x, on a

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = -(x' - x), \quad \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x' - x}{r} = -a,$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{a}{r^2},$$

et, par suite,

$$X = -\sum \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dq.$$

Considérons l'intégrale

$$(2) \qquad V = \sum \frac{dq}{r}$$

étendue à tous les corps électrisés; cette somme est aussi une fonction des coordonnées x, y, z du point P, et l'on a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dq = -X.$$

On en conclut

$$(3) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Ainsi les composantes de l'action exercée sur une masse 1 d'électricité positive placée au point P, par l'ensemble des corps électrisés, sont les dérivées partielles, prises en signes contraires, d'une certaine fonction des coordonnées du point P. Cette fonction V est ce que, dans ses calculs sur l'attraction, Gauss a appelé le *potentiel*.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le point P est situé en dehors des masses agissantes; dans ce cas, la dis-

tance r ne devenant pas nulle, le quotient $\frac{1}{r}$ reste fini, et l'intégrale V a une valeur parfaitement déterminée; le potentiel est une fonction finie et continue de x, y, z. Les composantes X, Y, Z jouissent de la même propriété; mais lorsque le point P est situé à l'intérieur des masses agissantes, la fonction $\frac{1}{r}$ devenant infinie, la détermination des intégrales présente de graves difficultés; avant d'aborder ces questions délicates, nous chercherons le potentiel d'une couche sphérique homogène.

POTENTIEL D'UNE COUCHE SPHÉRIQUE HOMOGÈNE.

160. Considérons une couche homogène comprise entre deux sphères de rayons a et $a + da$, ayant même centre O; appelons ρ la distance OP, θ l'angle que fait avec la droite OP le rayon qui va du centre à un point quelconque M de la couche, et φ l'angle que fait le plan POM avec un plan fixe passant par OP. L'élément de volume ayant pour expression

$$dv = a^2 \sin\theta \, da \, d\theta \, d\varphi,$$

si l'on désigne par k la densité de l'électricité libre, on aura

$$dq = k\,dv = ka^2 \sin\theta \, da \, d\theta \, d\varphi$$

et, par suite,

$$V = ka^2 \, da \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{r} \, d\theta \, d\varphi = 2\pi k a^2 \, da \int_0^\pi \frac{\sin\theta \, d\theta}{r}.$$

De la relation

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\theta,$$

on déduit

$$r\,dr = a\rho \sin\theta \, d\theta;$$

si l'on remplace la variable θ par la variable r, il vient

$$V = \frac{2\pi k a \, da}{\rho} \int dr.$$

Il y a ici deux cas à distinguer, suivant que le point P est à l'extérieur de la couche sphérique ou à l'intérieur de la sphère a : dans le premier cas les limites de l'intégration sont $\rho - a$ et $\rho + a$, et l'on a

$$\int_{\rho-a}^{\rho+a} dr = 2a, \quad V = \frac{4\pi k a^2 da}{\rho} = \frac{M}{\rho},$$

en désignant par M la masse de la couche. Le potentiel de la couche sphérique, agissant sur un point extérieur, est le même que si la masse de la couche était concentrée en son centre. Dans le second cas, les limites sont $a - \rho$ et $a + \rho$, et l'on a

$$\int_{a-\rho}^{a+\rho} dr = 2\rho, \quad V = 4\pi k a da = \frac{M}{a}.$$

Le potentiel de la couche sphérique, agissant sur un point intérieur P, est constant, c'est-à-dire indépendant de la position du point P; on en déduit que la force est nulle.

Considérons maintenant une sphère homogène de rayon a, agissant sur un point P situé dans la sphère même et à une distance ρ du centre; on peut regarder la sphère comme composée de couches homogènes concentriques. Les couches dont le rayon est moindre que ρ, agissant sur un point extérieur P, donnent un potentiel égal à

$$\frac{4\pi k}{\rho}\int_0^{\rho} a^2 da = \frac{4\pi k \rho^2}{3};$$

celles dont le rayon est plus grand que ρ, agissant sur un point intérieur, donnent un potentiel égal à

$$4\pi k \int_{\rho}^{a} a da = 2\pi k (a^2 - \rho^2).$$

Le potentiel de la sphère entière est donc

$$V = 2\pi k \left(a^2 - \frac{\rho^2}{3}\right).$$

Si l'on veut calculer l'action de cette sphère sur le point P, on remarquera que les couches dont le rayon est supérieur à ρ n'exercent aucune action sur le point P, et que les cou-

ches dont le rayon est inférieur à ρ agissent comme si elles étaient concentrées au centre O; la résultante est une force égale à

$$\frac{4}{3}\pi k\rho,$$

dirigée suivant la droite OP; ses projections sur des axes passant par le point O sont

$$\frac{4}{3}\pi kx, \quad \frac{4}{3}\pi ky, \quad \frac{4}{3}\pi kz;$$

on voit qu'elles sont égales et de signes contraires aux dérivées partielles du potentiel.

CAS OU LE POINT ATTIRÉ EST SITUÉ A L'INTÉRIEUR DE LA MASSE AGISSANTE.

161. Il faut d'abord définir nettement la signification des intégrales V, X, Y, Z. Imaginons une sphère, décrite du point P comme centre avec un rayon égal à l'unité, et considérons le cône qui a pour sommet le point P, et pour base un élément $d\omega$ de la surface de cette sphère; deux sphères décrites, du point P comme centre, avec des rayons r et $r+dr$ découperont dans le cône un élément de volume

$$dv = r^2\, d\omega\, dr,$$

et l'on aura

$$dq = kr^2\, d\omega\, dr,$$

k désignant la densité de l'électricité libre dans cet élément Concevons une surface fermée et convexe très-petite S, enveloppant le point P; appelons ρ et R les distances du point P à la surface S et à la surface extérieure du corps sur un même rayon mené par le point P. Le potentiel de la masse située à l'extérieur de la surface S est

$$\sum \frac{dq}{r} = \int\int kr\, d\omega\, dr = \int d\omega \int_\rho^R kr\, dr;$$

quand ρ tend vers zéro, l'intégrale

$$\int_\rho^R kr\, dr$$

tend vers une limite déterminée

$$\int_0^R krdr;$$

la limite de l'intégrale multiple est le potentiel de la masse entière. Il en est de même des composantes de la force; la composante, suivant l'axe des x, de l'action de la masse extérieure à la surface S est (n° 158)

$$-\sum \frac{adq}{r^2} = -\int d\omega \int_\rho^R kadr;$$

lle tend vers une limite déterminée, quand ρ tend vers zéro.

162. Ainsi la masse agissante qui environne le point P n'introduit dans les intégrales V, X, Y, Z, malgré la petitesse de a distance, que des quantités très-petites. On en conclut que es intégrales sont des fonctions finies et continues de x, y, . Soient, en effet, V_1 le potentiel de la masse comprise dans a surface S, et V_2 celui de la masse extérieure, agissant sur le oint P; V'_1 et V'_2 les potentiels des mêmes masses agissant ur un point P′, voisin de P, et situé aussi à l'extérieur de la urface S; on a

$$V' - V = (V'_2 - V_2) + V'_1 - V_1;$$

e potentiel V_2 de la masse extérieure, agissant sur un point P ion situé dans cette masse, étant en fonction continue de x, ; z, la différence $V'_2 - V_2$ est très-petite; d'autre part, chaune des quantités V_1 et V'_1 est très-petite : donc la différence $'$ — V est elle-même très-petite. On verrait de la même maère que X, Y, Z sont des fonctions continues.

163. Nous allons démontrer que les composantes de la force nt encore égales et de signes contraires aux dérivées parlles du potentiel. C'est ce que l'on vérifie aisément lorsque densité k du fluide est constante; partageons la masse agisate en deux parties : celle qui est comprise dans une petite hère à l'intérieur de laquelle est situé le point P, et la partie

extérieure; appelons V_1 et V_2 les potentiels de ces deux parties, X_1 et X_2 les composantes des forces qu'elles exercent sur le point P. Le point P n'étant pas situé dans la seconde partie, on a

$$X_2 = -\frac{dV_2}{dx}.$$

D'après les propriétés des couches sphériques homogènes (n° 160), on a de même

$$X_1 = -\frac{dV_1}{dx};$$

on en conclut

$$X = -\frac{dV}{dx}.$$

164. Considérons maintenant le cas où la densité est variable. Décrivons du point P, comme centre, avec un rayon très-petit ρ, une sphère S, et prenons un point P′ voisin de P et situé à l'intérieur de la sphère; appelons a la distance PP′; nous ferons voir que le rapport $\frac{V-V'}{a}$ a une limite quand a tend vers zéro, et que cette limite est la composante X de la force suivant la droite PP′. En effet, le rapport $\frac{V_2-V'_2}{a}$ diffère peu de X_2, cette dernière quantité différant peu elle-même de X, on peut écrire

$$V_2 - V'_2 = a(X + \varepsilon),$$

ε s'évanouissant avec a et ρ.

Pour évaluer V_1 et V'_1, nous prendrons pour coordonnées d'un point quelconque M les deux distances PM, P′M, que nous désignerons par r et r', et l'angle ψ que fait le plan PMP′ avec un plan fixe passant par la droite PP′; un élément du plan PMP′ a pour expression $r\,dr\,d\theta$, θ étant l'angle MPP′. Si, dans la relation

$$r'^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta,$$

nous faisons varier θ, laissant r constante, nous aurons

$$r'\,dr' = ar\sin\theta\,d\theta,$$

l'élément de surface deviendra

$$\frac{r'\,dr\,dr'}{a\sin\theta} = \frac{rr'\,dr\,dr'}{ay},$$

étant la distance de l'élément à l'axe PP'. Cet élément de rface, en tournant autour de l'axe, engendre un élément de lume

$$dv = \frac{rr'\,dr\,dr'\,d\psi}{a}.$$

a ainsi

$$V_1 = \frac{1}{a}\sum k r'\,dr\,dr'\,d\psi, \quad V'_1 = \frac{1}{a}\sum k r\,dr\,dr'\,d\psi.$$

égrons d'abord par rapport à ψ, et posons

$$H = \int_0^{2\pi} k\,d\psi;$$

tant une fonction de r et r', les expressions précédentes iennent

$$V_1 = \frac{1}{a}\sum H r'\,dr\,dr', \quad V'_1 = \frac{1}{a}\sum H r\,dr\,dr',$$

ı

$$V_1 - V'_1 = \sum H\frac{r'-r}{a}\,dr\,dr'.$$

quantité H conservant le même signe, et le rapport $\frac{r'-r}{a}$ ıt compris entre -1 et $+1$, on pourra écrire

$$V_1 - V'_1 = \lambda\sum H\,dr\,dr',$$

tant un nombre compris entre -1 et $+1$. D'autre part, si ı désigne par H_1 une valeur moyenne de H, on aura

$$V_1 - V'_1 = \lambda H_1\sum dr\,dr'.$$

ur calculer la valeur de l'intégrale double, si l'on intègre bord par rapport à r' et ensuite par rapport à r, il faudra

partager l'intégrale en deux parties :

$$\int_0^a dr \int_{a-r}^{a+r} dr' + \int_a^\rho dr \int_{r-a}^{r+a} dr' = a(2\rho - a).$$

On a ainsi

$$V_1 - V'_1 = \lambda H_1 a(2\rho - a),$$

et, par suite,

$$\frac{V - V'}{a} = X + \varepsilon + \lambda H_1(2\rho - a);$$

ce rapport a pour limite X, quand a et ρ tendent vers zéro (*).

SURFACES DE NIVEAU.

165. On appelle *surface de niveau* le lieu des points pour lesquels le potentiel V a une même valeur. Par le point P passe une surface de niveau, et une seule, et il est facile de voir que la force qui s'exerce en ce point est normale à la surface de niveau. On sait, en effet, que la normale à cette surface au point P fait avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus sont proportionnels aux dérivées partielles

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

et par conséquent proportionnels aux composantes X, Y, Z de la force. On en conclut que la force est dirigée suivant la normale à la surface.

Soit dn la portion de normale comprise entre deux surfaces de niveau infiniment voisines V et $V + dV$, et supposons que l'axe des x coïncide avec la normale; on a

$$F = X = -\frac{dV}{dn}.$$

Ainsi la force qui s'exerce en un point est égale à la dérivée du potentiel par rapport à la normale à la surface de niveau

(*) Cette démonstration ingénieuse a été imaginée par M. Bouquet.

passant par le point considéré, et cette force est dirigée du côté vers lequel le potentiel diminue.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

166. Jusqu'ici nous n'avons parlé que des dérivées premières du potentiel; les dérivées secondes jouissent aussi de propriétés très-remarquables. Considérons d'abord le cas où le point P est situé en dehors des masses agissantes; la fonction $\frac{1}{r}$ ne devenant pas infinie, on peut différentier sous le signe somme comme à l'ordinaire. Une première opération (n° 159) nous a donné

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sum \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dq = \sum \frac{a\,dq}{r^2} = \sum \frac{x' - x}{r^3} dq.$$

Une seconde opération nous donnera

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sum \left(-\frac{1}{r^3} - 3\,\frac{x' - x}{r^4}\,\frac{\partial r}{\partial x} \right) dq = \sum \frac{3a^2 - 1}{r^3} dq.$$

On a de même

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sum \frac{3b^2 - 1}{r^3} dq, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \sum \frac{3c^2 - 1}{r^3} dq.$$

On en déduit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \sum \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - 3}{r^3} dq.$$

La fonction placée sous le signe somme étant identiquement nulle, la somme elle-même est nulle. Ainsi, tant que le point P est en dehors des masses agissantes, on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Pour abréger, nous représenterons le premier membre par le

symbole ΔV, de sorte que l'équation précédente s'écrira

$$\Delta V = 0.$$

Lorsque le point P est situé à l'intérieur des masses agissantes, la fonction placée sous le signe somme devenant infinie, on ne peut plus opérer comme nous avons fait; d'ailleurs, les expressions telles que

$$\sum \frac{3a^2 - 1}{r^3} dq,$$

auxquelles nous avons été conduit, n'ont plus ici de signification déterminée; car si l'on remplace dq par sa valeur $kr^2 d\omega dr$, il reste encore le facteur r au dénominateur, et la fonction sous le signe somme devient infinie. Il faut alors recourir à d'autres méthodes.

167. Supposons d'abord que la masse agissante ait, dans le voisinage du point P, une densité constante. Imaginons une petite sphère S comprenant le point P; appelons V_1 le potentiel de la masse renfermée dans la sphère, et V_2 celui de la masse extérieure. L'origine des coordonnées étant placée au centre de la sphère, nous avons trouvé (n° 160)

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi k x, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = -\frac{4}{3}\pi k y, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = -\frac{4}{3}\pi k z;$$

on en déduit

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = -\frac{4}{3}\pi k,$$

et, par suite,

$$\Delta V_1 = -4\pi k,$$

k étant la densité du fluide dans la petite sphère. Le point P n'étant pas situé dans la masse extérieure à la sphère, on a d'autre part

$$\Delta V_2 = 0,$$

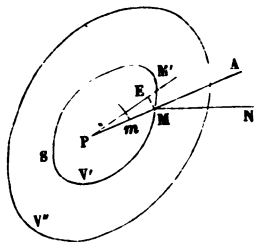
il en résulte

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = -4\pi k.$$

3. La même propriété a lieu lorsque la masse agissante pas homogène autour du point P; voici la démonstration ée par M. Clausius.

aginons, comme précédemment, une petite surface S, ée et convexe, enveloppant le point P (*fig.* 41); appelons

Fig. 41.



potentiel de la masse comprise dans cette surface, et V_2 de la partie extérieure. Puisque $\Delta V_2 = 0$, il suffit de ler ΔV_1. Menons du point P un cône d'ouverture angu- infiniment petite $d\omega$; ce cône détermine, entre deux ces sphériques de rayons r et $r + dr$ et ayant pour centre int P, un élément de volume

$$dv = r^2\, d\omega\, dr.$$

it a, b, c les cosinus des angles que fait avec les axes une énératrices PM du cône. La masse

$$dq = k r^2\, d\omega\, dr,$$

e dans cet élément de volume, exerce sur le point P une n

$$\frac{k r^2\, d\omega\, dr}{r^2} = k\, d\omega\, dr,$$

pour composante, suivant l'axe des x,

$$- ak\, d\omega\, dr,$$

n a

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = - X_1 = \sum ak\, d\omega\, dr = \int a\, d\omega \int_0^\rho k\, dr,$$

ρ étant la longueur du rayon allant du point P à un point quelconque M de la surface S. Si l'on pose

$$H = \int_0^\rho k\,dr,$$

cette expression prend la forme

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int a H\,d\omega.$$

La lettre r désigne la distance du point P à un point quelconque m du rayon PM, et, dans l'intégrale H, cette variable croît de o à ρ. Appelons r' la distance Mm, et remplaçons la variable r par la variable r'; on a

$$r = \rho - r', \quad dr = -dr',$$

$$H = -\int_\rho^0 k\,dr' = \int_0^\rho k\,dr'.$$

L'intégrale conserve la même forme; mais la distance est comptée à partir de la surface S au lieu de l'être à partir du point P. Cette intégrale H dépend de la direction du rayon MP et de sa longueur; c'est une fonction des quatre variables a, b, c, ρ, dont trois seulement sont indépendantes, à cause de la relation entre les cosinus. Le cône $d\omega$ découpe sur la surface S un élément MM′ que nous désignerons par $d\sigma$, et sur la sphère décrite du point P comme centre, avec le rayon ρ, un élément ME égal à $\rho^2 d\omega$. Appelons α, β, γ les cosinus des angles que fait avec les axes la normale MN à la surface au point M, i l'angle de cette normale avec le prolongement MA du rayon PM; on a

$$\rho^2\,d\omega = d\sigma \cos i,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \int a H\,d\omega = \int \frac{a H \cos i}{\rho^2}\,d\sigma.$$

Cette nouvelle forme présente l'avantage que l'élément différentiel $d\sigma$ et les limites de l'intégration sont indépendantes

de la position du point P à l'intérieur de la surface S. D'ailleurs la fonction placée sous le signe somme conserve une valeur finie. On peut donc différentier sous le signe somme à la façon ordinaire, et l'on a

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \int \frac{\partial\left(\frac{a\mathrm{H}\cos i}{\rho^2}\right)}{\partial x} d\sigma.$$

Si l'on appelle ξ, η, ζ les coordonnées du point M, on a

$$\rho^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2,$$

$$a = \frac{\xi - x}{\rho}, \quad b = \frac{\eta - y}{\rho}, \quad c = \frac{\zeta - z}{\rho},$$

$$\cos i = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

$$\rho\cos i = \alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z).$$

On peut écrire

$$\frac{a\mathrm{H}\cos i}{\rho^2} = \frac{a}{\rho^3}\cdot\rho\cos i.\mathrm{H};$$

on en déduit

$$\frac{\partial\left(\frac{a\mathrm{H}\cos i}{\rho^2}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{a}{\rho^3}\right)}{\partial x}\mathrm{H}\rho\cos i + \frac{\partial(\rho\cos i)}{\partial x}\frac{a\mathrm{H}}{\rho^3} + \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}\frac{a\cos i}{\rho^2}.$$

Or

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{\xi - x}{\rho} = -a,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{a}{\rho^3}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\xi - x}{\rho^4}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho^4} - 4\frac{\xi - x}{\rho^5}\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{4a^2 - 1}{\rho^4},$$

$$\frac{\partial(\rho\cos i)}{\partial x} = -\alpha.$$

On a donc

$$\frac{\partial\left(\frac{a\mathrm{H}\cos i}{\rho^2}\right)}{\partial x} = \frac{4a^2 - 1}{\rho^3}\mathrm{H}\cos i - \frac{a\alpha\mathrm{H}}{\rho^3} + \frac{a\cos i}{\rho^2}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \int \frac{H}{\rho^3}\left[(4a^2-1)\cos i - a\alpha\right] d\sigma + \int \frac{a\cos i}{\rho^2}\frac{\partial H}{\partial x} d\sigma.$$

On a de même

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = \int \frac{H}{\rho^3}\left[(4b^2-1)\cos i - b\beta\right] d\sigma + \int \frac{b\cos i}{\rho^2}\frac{\partial H}{\partial y} d\sigma,$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = \int \frac{H}{\rho^3}\left[(4c^2-1)\cos i - c\gamma\right] d\sigma + \int \frac{c\cos i}{\rho^2}\frac{\partial H}{\partial z} d\sigma.$$

Si l'on ajoute ces expressions, on voit aisément que les termes de la première intégrale s'annulent; il vient

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = \int \frac{\cos i}{\rho^2}\left(a\frac{\partial H}{\partial x} + b\frac{\partial H}{\partial y} + c\frac{\partial H}{\partial z}\right) d\sigma.$$

La quantité H est, comme nous l'avons dit, une fonction de a, b, c, ρ; mais ces quantités sont des fonctions connues des coordonnées x, y, z du point P: on a donc

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x};$$

mais

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} - \frac{\xi - x}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{a^2-1}{\rho},$$

$$\frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{\eta - y}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{ab}{\rho}, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{ac}{\rho}.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial a}\frac{a^2-1}{\rho} + \frac{\partial H}{\partial b}\frac{ab}{\rho} + \frac{\partial H}{\partial c}\frac{ac}{\rho} - \frac{\partial H}{\partial \rho}a,$$

ou

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{a}{\rho}\left(a\frac{\partial H}{\partial a} + b\frac{\partial H}{\partial b} + c\frac{\partial H}{\partial c}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial a} - a\frac{\partial H}{\partial \rho}.$$

On a de même

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{b}{\rho}\left(a\frac{\partial H}{\partial a} + b\frac{\partial H}{\partial b} + c\frac{\partial H}{\partial c}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial b} - b\frac{\partial H}{\partial \rho},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{c}{\rho}\left(a\frac{\partial H}{\partial a} + b\frac{\partial H}{\partial b} + c\frac{\partial H}{\partial c}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial c} - c\frac{\partial H}{\partial \rho}.$$

déduit

$$a\frac{\partial H}{\partial x}+b\frac{\partial H}{\partial y}+c\frac{\partial H}{\partial z}=-\frac{\partial H}{\partial \rho};$$

ssion de ΔV_1 devient ainsi

$$\Delta V_1=-\int\frac{\cos i}{\rho^2}\frac{\partial H}{\partial \rho}\,d\sigma.$$

; avons posé

$$H=\int_0^\rho k\,dr';$$

ır de ρ n'entre pas sous le signe somme; la limite su-
e seule dépend de ρ; en appelant k_1 la densité du
lectrique au point P, on a donc

$$\frac{\partial H}{\partial \rho}=k_1,$$

suite,

$$\Delta V_1=-k_1\int\frac{\cos i}{\rho^2}\,d\sigma=-k_1\int d\omega.$$

ıtégrale double devant être étendue à toute la sphère
du point P comme centre avec un rayon égal à l'unité,
fin

$$\Delta V_1=-4\pi k_1,$$

suite,

$$\Delta V=-4\pi k_1,$$

ɜ $\Delta V_2=0$.

l'expression ΔV est égale à zéro ou à $-4\pi k_1$, suivant
point P est situé à l'extérieur ou à l'intérieur des
agissantes. Mais on peut comprendre tous les cas de
tion dans un même énoncé : si l'on désigne par k la
de la masse agissante au point P, on a, d'une manière
e, la relation

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi k.$$

ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE DANS UN SYSTÈME DE CORPS PARFAITEMENT CONDUCTEURS.

169. Un corps bon conducteur est un corps qui n'oppose aucune résistance au mouvement de l'électricité. Considérons un système formé de conducteurs isolés, et chargés de quantités électriques données. Appelons V le potentiel de tout le système sur un point P quelconque. Pour l'équilibre électrique, il est nécessaire et il suffit que le potentiel ait une valeur constante à l'intérieur de chacun des corps conducteurs; car si le potentiel avait une valeur variable dans l'un d'eux, une masse m d'électricité libre située dans le corps serait sollicitée par une force égale à $-m\frac{dV}{dn}$, et se mouvrait dans la direction de cette force. D'autre part, les deux quantités $+m$ et $-m$ d'électricités contraires, qui forment une masse infiniment petite de fluide neutre, seraient sollicitées par deux forces égales et contraires, se mouvraient en sens opposés, et le fluide neutre serait décomposé. Ainsi le potentiel de tout le système doit avoir une valeur constante V_1 dans l'un des conducteurs, une valeur constante V_2 dans un second, etc. Il est évident, d'ailleurs, que cette condition est suffisante. Le potentiel est variable dans l'espace isolant qui sépare les corps les uns des autres.

170. Le potentiel ayant une valeur constante dans chacun des corps conducteurs, les dérivées premières $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ sont nulles en tous les points du corps, et il en est de même des dérivées secondes $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$. Ainsi, dans chacun des corps, on a $\Delta V = 0$; de la relation fondamentale $\Delta V = -4\pi k$, on conclut que la densité k de l'électricité libre à l'intérieur des corps est nulle, et par conséquent, qu'il n'y a pas d'électricité libre à l'intérieur des corps conducteurs. Il résulte de là que l'électricité libre est distribuée suivant une couche infiniment mince à la surface de chacun des corps conducteurs.

Soit $d\sigma$ un élément de surface, ε l'épaisseur de la couche en ce point; la masse d'électricité libre répandue sur cet élément de surface est $dq = k\varepsilon\, d\sigma$. Comme on ne peut pas évaluer ε, on pose $k\varepsilon = h$, d'où $dq = h\, d\sigma$. Le coefficient h est ce qu'on appelle la *densité de la couche électrique*. La quantité d'électricité libre répandue à la surface de l'un des corps, ou sa charge électrique, est

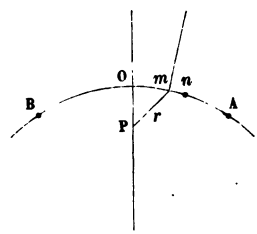
$$Q = \int h\, d\sigma,$$

son potentiel est

$$V = \int \frac{h\, d\sigma}{r}.$$

171. Dans chacun des corps conducteurs, le potentiel, comme nous l'avons dit, conserve une valeur constante; il varie d'une manière continue à l'extérieur, ou dans l'espace qui sépare deux corps conducteurs; nous allons démontrer qu'il jouit de la même propriété quand le point P traverse une couche électrique. Supposons, en effet, que le point P soit placé à une distance très-petite d'une couche électrique, distance mesurée par la normale PO (*fig.* 42) à cette couche;

Fig. 42.



appelons V_1 le potentiel d'une zone très-petite AB comprenant le point O, et V_2 le potentiel des autres masses électriques; on a

$$V = V_1 + V_2.$$

Sur un élément mn de la zone est répandue une quantité d'électricité $h\, d\sigma$, et le potentiel de la zone a pour expression

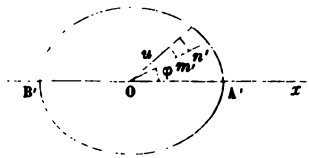
$$V_1 = \int \frac{h\, d\sigma}{r}.$$

Projetons la zone AB sur le plan tangent au point O; : lons γ le cosinus de l'angle que la normale en m fait a' normale au point O, $d\sigma'$ la projection de l'élément d aura

$$d\sigma' = \gamma d\sigma.$$

Menons dans le plan tangent un axe fixe Ox (*fig.* 43), terminons l'élément $d\sigma'$ par deux droites, faisant avec l'a

Fig. 43.



des angles égaux à φ et à $\varphi + d\varphi$, et par deux cercles d du point O comme centre, avec des rayons égaux à u et u - on aura alors

$$d\sigma' = u\,du\,d\varphi,$$

et, par suite,

$$V_1 = \int \frac{h\,d\sigma'}{\gamma r} = \int\int \frac{h\,u\,du\,d\varphi}{\gamma r}.$$

En désignant par ψ l'angle de la droite Pm avec la normal (*fig.* 42), on a

$$u = r \sin\psi,$$

$$V_1 = \int\int \frac{h \sin\psi}{\gamma}\,du\,d\varphi,$$

ou

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho} \frac{h \sin\psi}{\gamma}\,du.$$

Soit h_1 la valeur maximum de h sur la zone, γ_1 la valeu nimum de γ, laquelle est voisine de l'unité; on a, po point quelconque de la zone,

$$\frac{h \sin\psi}{\gamma} < \frac{h_1}{\gamma_1},$$

par suite,

$$\int_0^\rho \frac{h \sin\psi}{\gamma} du < \frac{h_1}{\gamma_1} \rho,$$

et, en supposant que la projection de la zone sur le plan tangent soit un cercle de rayon ρ,

$$V_1 < 2\pi \frac{h_1}{\gamma_1} \rho.$$

On voit que la zone n'introduit dans le potentiel qu'une quantité très-petite. Concevons maintenant que le point P se meuve sur la normale PO et traverse la couche électrique; V_1 ayant une valeur très-petite et V_2 variant d'une manière continue, il en est de même de V.

172. Dans chacun des corps conducteurs, le potentiel a une valeur constante, et cette valeur est la même qu'à la surface puisque la fonction varie d'une manière continue; la surface du corps est donc une surface de niveau. La force qui agit sur la quantité d'électricité $h\,d\sigma$ répandue sur un élément de la surface du corps est $-h\frac{dV}{dn}d\sigma$, la dérivée étant prise à l'extérieur; cette force est dirigée du dedans au dehors et détruite par la résistance de l'air ou de l'enveloppe isolante; il en résulte que si h est positif, la fonction V diminue quand on va de l'intérieur du corps à l'extérieur; c'est le contraire qui a lieu quand h est négatif.

La force dont nous venons de parler produit sur l'enveloppe isolante une pression qui, rapportée à l'unité de surface, est $-h\frac{dV}{dn}$.

Remarquons encore que $\frac{dV}{dn}$ change brusquement de valeur quand le point P traverse une couche électrique; car, à l'intérieur, cette dérivée est nulle, et, à l'extérieur, elle a une valeur finie différente de zéro.

La superposition de deux états d'équilibre est un nouvel état d'équilibre. Soient en effet V et V′ les potentiels relatifs

à ces deux états d'équilibre; le potentiel $V+V'$ pour le no état résultant de la superposition des deux premiers ser: core constant dans chaque corps conducteur.

Si l'on change dans un rapport constant la densité trique de chaque point, on obtient de même un nouvel d'équilibre; car le potentiel, étant multiplié par ce n rapport, conserve une valeur constante à l'intérieur de ch corps.

Considérons un corps conducteur unique dans un n isolant; nous démontrerons plus tard qu'une quantité dc d'électricité libre ne peut être distribuée que d'une : manière à la surface de ce corps. Il résulte de ce qui pré que si l'on connaît la loi de distribution d'une quantité Q lectricité à la surface du corps, on connaîtra celle d'une (tité quelconque Q; il suffira de multiplier la densité en ch point par le rapport $\frac{Q}{Q_1}$, en d'autres termes, de poser

$$h = h_1 \frac{Q}{Q_1}.$$

Le potentiel variant dans le même rapport, on a $V = V_1$ et, par suite,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{Q}{Q_1} \frac{\partial V_1}{\partial n},$$

$$h \frac{\partial V}{\partial n} = h_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} \times \left(\frac{Q}{Q_1}\right)^2.$$

Ainsi la pression en chaque point est proportionnelle au c de la charge.

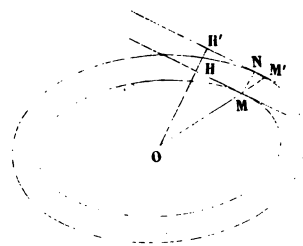
DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR UNE SPHÈRE OU UN ELLIPSOÏDE.

173. La recherche de la loi de distribution de l'électri libre à la surface d'un corps conducteur isolé, et qui n soumis à l'action d'aucun autre corps électrisé, présente grandes difficultés mathématiques; cette question spéc s'écartant du plan de ce cours, nous nous bornerons à en ci quelques exemples simples.

Il est évident que sur une sphère la couche électrique doit être uniforme; si donc on appelle a le rayon de la sphère, la densité de la couche sera $h = \frac{Q}{4\pi a^2}$. Le potentiel (n° 160) est $\frac{Q}{a}$ à l'intérieur, et $\frac{Q}{\rho}$ à l'extérieur, ρ désignant la distance du point P au centre. La pression électrique est égale à $\frac{Q^2}{4\pi a^4}$.

Considérons maintenant un corps conducteur ayant la forme d'un ellipsoïde; imaginons une seconde surface ellipsoïde, concentrique et homothétique à la première, très-voisine et extérieure, et concevons que l'espace compris entre ces deux surfaces soit rempli d'un fluide de densité constante k. On sait qu'une couche ellipsoïde homogène telle que celle-là n'exerce aucune action sur un point intérieur; le potentiel à l'intérieur étant constant, cette couche pourra servir à figurer la loi de distribution de l'électricité à la surface de l'ellipsoïde. Soit $1 + \alpha$ le rapport de similitude des deux surfaces, α étant très-petit; appelons p la perpendiculaire OH abaissée du centre sur le plan tangent au point M (*fig.* 44); l'épaisseur ε

Fig. 44.



de la couche en M est la distance MN des plans tangents parallèles aux points homologues M et M', distance égale à $p\alpha$; on a donc $h = k\varepsilon = k\alpha p$; ainsi la densité h de la couche électrique en chaque point M est proportionnelle à la distance du centre au plan tangent en ce point. Une ligne d'égale densité est la ligne de contact d'un plan tangent à l'ellipsoïde et à une sphère concentrique donnée. Si l'on désigne par a, b, c les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde, le volume de la

couche étant $\frac{4}{3}\pi abc\,[(1+\alpha)^3-1]$, ou sensiblement

sa masse ou la charge électrique est

$$Q = 4\pi abc\alpha k,$$

d'où

$$h = \frac{Qp}{4\pi abc}.$$

On a d'ailleurs

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Si l'on suppose que c devienne très-petit, l'ellipsoïde

forme en un plateau elliptique infiniment mince; puis

$$\lim \frac{p}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$

on a

$$h = \frac{Q}{4\pi ab}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}};$$

les lignes d'égale densité sont des ellipses concentri

homothétiques. La densité électrique augmente à

qu'on s'éloigne du centre sur un rayon.

CHAPITRE II.

SUITE DE L'ÉLECTROSTATIQUE.

Formule de Green. — Théorèmes qui en résultent.

FORMULE DE GREEN.

174. Soient U et V deux fonctions quelconques finies et ntinues de x, y, z. Posons, comme précédemment,

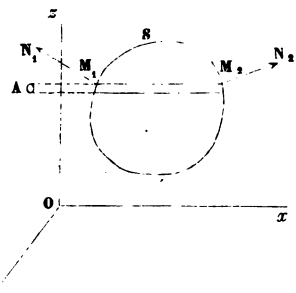
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

considérons l'intégrale

$$\int\int\int U \Delta V \, dx \, dy \, dz,$$

ndue au volume enveloppé par une surface fermée con-

Fig. 45.



S (*fig.* 45). Cette intégrale est composée de trois termes ı forme

$$\int\int\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \, dx \, dy \, dz = \int\int dy \, dz \int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \, dx.$$

Dans l'intégrale $\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx$ les coordonnées y et z restent constantes, et les limites de l'intégration sont les abscisses x_1 et x_2 des deux points M_1 et M_2, où une droite parallèle à l'axe des x rencontre la surface S. On a donc, en intégrant par parties,

$$\int_{x_1}^{x_2} U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx = -\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dx,$$

et, par suite,

$$\int\int\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz = \int\int \left[-\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2}\right] dz\, dy$$
$$- \int\int\int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

Le produit $dx\, dy\, dz$ représente un élément de volume dv, le produit $dy dz$ un élément de surface $d\omega$ pris sur le plan des yz; on peut donc écrire l'équation précédente sous la forme plus simple

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dv = \int \left[-\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2}\right] d\omega - \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dv.$$

L'élément $d\omega$ est la projection sur le plan yOz de deux éléments $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ de la surface S, situés aux points M_1 et M_2. Si l'on appelle α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 les cosinus des angles que les normales $M_1 N_1$, $M_2 N_2$ à la surface aux points M_1 et M_2 font avec les axes des coordonnées, la normale en chaque point étant menée à l'extérieur du volume enveloppé par la surface, on a

$$d\omega = -\alpha_1 d\sigma_1 = +\alpha_2 d\sigma_2,$$

et, par suite,

$$\int \left[-\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2}\right] d\omega$$
$$= \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} \alpha_1 d\sigma_1 + \int \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} \alpha_2 d\sigma_2.$$

ais le second membre est l'intégrale

$$\int U \frac{\partial V}{\partial x} \alpha d\sigma$$

.endue à toute la surface S; on a donc

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dv = \int \alpha U \frac{\partial V}{\partial x} d\sigma - \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dv.$$

Les deux autres parties de l'intégrale proposée donnent de ıême

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dv = \int \beta U \frac{\partial V}{\partial y} d\sigma - \int \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} dv,$$

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dv = \int \gamma U \frac{\partial V}{\partial z} d\sigma - \int \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} dv.$$

En ajoutant ces trois équations terme à terme, il vient

$$\int U \Delta V dv = \int U \left(\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\sigma$$
$$- \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv.$$

Soit ds un élément MM′ de la normale à la surface S, menée ır le point M vers l'extérieur; les cosinus α, β, γ des angles ıe cette normale fait avec les axes ont pour expressions

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

n en déduit

$$\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{dV}{ds},$$

e qui donne finalement

$$\alpha) \int U \Delta V dv = \int U \frac{dV}{ds} d\sigma - \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) dv,$$

'intégrale double s'étendant à la surface S, et les deux intégrales triples au volume enveloppé par cette surface. Telle est a formule de Green.

Pour simplifier, nous avons supposé le volume limité par une surface convexe. Mais le même mode de raisonnement s'applique à un volume quelconque; quelle que soit la forme du volume, une parallèle à l'axe des x rencontre la surface S en un nombre pair de points M_1, M_2, M_3, M_4,...; l'intégrale

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx$$

doit être prise d'abord de x_1 à x_2, puis de x_3 à x_4, etc.; en transformant comme précédemment chacune de ces portions d'intégrale, on a

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx = -\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_3}$$
$$+ \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_4} - \ldots - \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dx,$$

et, par suite,

$$\int U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dv = \int \left[-\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_1} + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_3} \right.$$
$$\left. + \left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x_4} - \ldots \right] d\omega - \int \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dv;$$

en remarquant que

$$d\omega = -\alpha_1 d\sigma_1 = +\alpha_2 d\sigma_2 = -\alpha_3 d\sigma_3 = +\alpha_4 d\sigma_4 = \ldots,$$

on voit que le premier terme du second membre n'est autre chose que l'intégrale

$$\int U \frac{\partial V}{\partial x} \alpha d\sigma,$$

étendue à toute la surface S, la normale en chaque point étant menée en dehors du volume. Ainsi la formule de Green est générale.

Théorème II.

175. Nous supposerons dans ce qui suit que V désigne le potentiel d'un système de masses électriques, ou plus généralement d'un agent quelconque s'exerçant suivant la loi de

Newton. Si dans la formule de Green on fait $U = 1$, elle se réduit à

$$(\beta) \qquad \int \Delta V \, dv = \int \frac{dV}{ds} \, d\sigma;$$

si l'on remplace ensuite ΔV par sa valeur $-4\pi k$, elle devient

$$-4\pi \int k \, dv = \int \frac{dV}{ds} \, d\sigma.$$

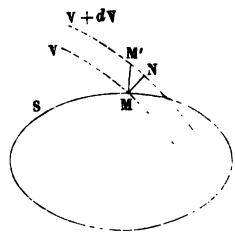
Mais l'intégrale $\int k \, dv$ n'est autre chose que la somme des masses agissantes situées dans un volume considéré; on a donc la relation

$$(11) \qquad \int \frac{dV}{ds} \, d\sigma = -4\pi Q.$$

On peut énoncer cette relation de la manière suivante :

Nous avons désigné par ds un élément extérieur MM′ de la normale à la surface S (*fig.* 46); considérons les deux surfaces

Fig. 46.



de niveau V et $V + dV$ qui passent par les points M et M′; appelons dn l'élément MN de la normale à la surface V compris entre les deux surfaces de niveau, et i l'angle NMM′ des deux normales. Dans le triangle rectangle MNM′, on a

$$dn = ds \cos i;$$

il en résulte

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dV}{dn} \cos i = -F \cos i;$$

F désignant la force qui s'exerce au point M, et qui est dirigée

suivant la normale MN à la surface de niveau, F cos i est la projection de cette force sur la normale MM′ à la surface S. L'équation (II) prend ainsi la forme suivante :

$$(\mathrm{II})' \qquad \int F \cos i \, d\sigma = 4\pi Q,$$

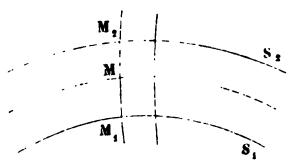
et l'on dira que *la somme des composantes normales des forces qui s'exercent sur les différents éléments d'une surface fermée est égale à la masse agissante enveloppée par cette surface, multipliée par le facteur constant* 4π.

Théorème III.

176. *La différence des forces qui s'exercent sur deux éléments correspondants de deux surfaces de niveau est égale à la masse agissante contenue dans le canal orthogonal compris entre ces deux éléments, multipliée par le facteur constant* 4π.

Soient S_1 et S_2 deux surfaces de niveau (*fig.* 47); prenons sur la première un élément $d\sigma_1$, et par chacun des points du

Fig. 47.



périmètre de cet élément menons une ligne orthogonale aux surfaces de niveau comprises entre S_1 et S_2; le canal ainsi formé découpera sur la surface S_2 un élément correspondant $d\sigma_2$. Appliquons le théorème précédent au volume enveloppé par ce canal et les deux éléments qui le terminent; il faut étendre l'intégrale à toute la surface du canal; en chaque point de la surface latérale, la force étant tangente à la ligne orthogonale, sa composante normale est nulle. L'intégrale se réduit donc aux termes fournis par les deux bases $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$. Si l'on mène les normales dans le sens $M_1 M_2$, la relation (II)

devient

$$\text{(III)} \qquad \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1 = -4\pi q,$$

q étant la masse agissante comprise dans le canal orthogonal.

Le théorème de M. Chasles est un cas particulier de celui-ci. Lorsqu'il n'y a aucune masse agissante entre les deux surfaces de niveau, on a

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1,$$

et par conséquent les forces qui s'exercent sur les éléments correspondants des surfaces de niveau sont égales.

Théorème IV.

177. *La densité en chaque point d'une couche électrique est égale à la force qui s'exerce en ce point divisée par le facteur constant* 4π.

Dans un système électrisé quelconque en équilibre, la surface S d'un corps conducteur est une surface de niveau, et sur cette surface est répandue une couche électrique. Prenons un élément $d\sigma$ de cette surface, et considérons deux surfaces voisines, savoir : une surface de niveau extérieure S_2 dans le voisinage de l'élément $d\sigma$, et une surface intérieure S_1; par chaque point du périmètre de l'élément $d\sigma$, menons à l'extérieur une ligne orthogonale aux surfaces de niveau comprises entre S et S_2, et prolongeons cette ligne arbitrairement à l'intérieur jusqu'à la surface S_1; nous formerons ainsi un canal détachant sur les surfaces S_2 et S_1 des éléments $d\sigma_2$ et $d\sigma_1$. Appliquons la relation (II) au volume de ce canal; l'intégrale doit être étendue à la surface qui l'enveloppe. Pour toute la partie qui est située à l'intérieur du conducteur, comme dV est nulle, les éléments de l'intégrale sont nuls. La normale en un point quelconque de la partie extérieure de la surface latérale du canal étant tangente à la surface de niveau qui passe en ce point, quand on marche sur cette normale on a $\frac{dV}{ds} = 0$, et les

éléments de l'intégrale pour cette partie de la surface latérale sont encore nuls. L'intégrale se réduit donc à l'élément $\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2$ fourni par la base extérieure $d\sigma_2$. D'autre part, si l'on désigne par h la densité de la couche électrique sur l'élément $d\sigma$, la masse électrique contenue dans le canal est $hd\sigma$. L'équation (II) devient donc

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = -4\pi h d\sigma,$$

ou

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 \frac{d\sigma_2}{d\sigma} = -4\pi h.$$

Si l'on suppose que la surface extérieure S_2 se rapproche de plus en plus de la surface S, le rapport $\frac{d\sigma_2}{d\sigma}$ a pour limite l'unité, et l'équation précédente se réduit à

$$\text{(IV)} \qquad \frac{dV}{dn} = -4\pi h,$$

la dérivée étant prise à l'extérieur.

178. Corollaire. — La pression exercée par la couche électrique sur le milieu isolant, et rapportée à l'unité de surface, est $-h\frac{dV}{dn}$ (n° 172), ou $4\pi h^2$. Ainsi *la pression en chaque point est proportionnelle au carré de la densité de la couche en ce point.*

Sur un ellipsoïde isolé et qui n'est soumis à l'action d'aucun autre corps électrisé, la pression est exprimée par la formule

$$\frac{Q^2 p^2}{4\pi a^2 b^2 c^2},$$

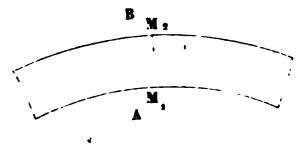
où Q désigne la charge, et p la distance du centre au plan tangent au point considéré (n° 173).

Théorème V.

179. *Les éléments correspondants de deux couches placées en regard l'une de l'autre contiennent des quantités d'électricité égales et de signes contraires.*

Considérons deux corps conducteurs A et B isolés, et placés en regard l'un de l'autre (*fig.* 48), de telle sorte que deux

Fig. 48.



parties S_1 et S_2 de leurs surfaces soient comprises dans un même canal orthogonal, ne renfermant entre les deux couches répandues sur S_1 et S_2 aucune autre masse électrique. Nous appellerons *éléments correspondants des deux couches* les éléments $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ compris dans un même canal orthogonal infiniment petit; imaginons ce canal prolongé d'une manière quelconque dans chacun des corps A et B et fermé aux deux bouts, et appliquons encore à ce volume la relation (II); tous les éléments de l'intégrale sont nuls : d'ailleurs la masse électrique qui y est contenue est $h_1 d\sigma_1 + h_2 d\sigma_2$, h_1 et h_2 désignant les densités sur $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$; l'équation se réduit donc à

$$h_1 d\sigma_1 + h_2 d\sigma_2 = 0. \tag{V}$$

180. Corollaire. — Supposons que les deux surfaces S_1 et S_2 soient très-voisines l'une de l'autre, et appelons e leur distance $M_1 M_2$. Les éléments $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ étant sensiblement égaux, on a approximativement $h_2 = -h_1$. La densité est donnée par la relation (IV),

$$h_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn};$$

mais quand on va de M_1 à M_2, la dérivée diffère peu de $\frac{V_2 - V_1}{e}$;

on a donc la formule approchée

$$h_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

Ainsi la densité électrique en chaque point varie en raison inverse de la distance des deux surfaces.

Calculons la charge : on a approximativement

$$Q_1 = \int h_1 \, d\sigma_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi} \int \frac{d\sigma_1}{e} = \frac{(V_1 - V_2) S_1}{4\pi e_1},$$

e_1 désignant une valeur moyenne de la distance e.

Ces considérations peuvent être appliquées au plateau condensateur et à la bouteille de Leyde. Ordinairement, on fait communiquer le corps B avec le sol; dans ce cas, on a $V_2 = 0$, et la formule précédente se réduit à

$$Q_1 = \frac{V_1 S_1}{4\pi e_1}.$$

Si la bouteille était parfaite, c'est-à-dire si les deux armatures étaient fermées, les charges des deux armatures seraient rigoureusement égales et de signes contraires.

Théorème VI.

181. *Lorsque, dans un système électrisé en équilibre, un corps conducteur enveloppe diverses masses électriques, la somme algébrique des quantités d'électricité situées à l'intérieur et sur la surface interne du corps est nulle.*

Soient q, q', q''... les masses électriques situées à l'intérieur du corps conducteur enveloppant A (*fig.* 49); sur la surface interne du corps A est répandue une couche Q_1, et sur la surface externe une couche Q_2; il peut y avoir d'autres masses électriques en dehors. Imaginons une surface fermée S dans le corps A lui-même, c'est-à-dire entre sa surface interne et sa surface externe, et appliquons au volume enveloppé par cette surface le théorème II :

$$\int \frac{dV}{ds} d\sigma = -4\pi \dot{Q}.$$

Le potentiel V de tout le sytème ayant une valeur constante dans le corps A, la dérivée $\frac{dV}{ds}$ est nulle en chaque point de

Fig. 49.

la surface S; on a donc $Q = 0$, et, par suite,

(VI). $$Q_1 + q + q' + \ldots = 0.$$

Les masses q, q'... peuvent appartenir à des corps mauvais conducteurs, ou bien être les couches répandues à la surface de corps conducteurs électrisés, séparés les uns des autres et de la surface interne du corps A par un milieu isolant.

Corollaire. — Supposons qu'il n'y ait pas d'autres masses électriques que celles qui sont enveloppées par le corps A, et que ce corps ait été primitivement à l'état neutre; il sera électrisé par influence, et la somme algébrique $Q_1 + Q_2$ des quantités d'électricité libre développées sur ce corps sera nulle; on aura donc

$$Q_2 = -Q_1 = q + q' + \ldots.$$

On trouve ainsi la loi de Faraday : *la quantité d'électricité induite sur un corps conducteur enveloppant est égale à la quantité inductrice.*

Théorème VII.

182. *Quand une surface fermée ne renferme aucune masse agissante, et que sur cette surface le potentiel est constant, le potentiel est aussi constant dans tout le volume enveloppé par la surface.*

Supposons que, dans la formule de Green, les deux fonctions U et V soient égales et représentent un même potentiel,

on aura

$$\int V\Delta V\,dv = \int V\frac{dV}{ds}\,d\sigma - \int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv;$$

si l'on remplace ΔV par sa valeur $-4\pi k$ et si l'on remarque que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = F^2,$$

il vient

$$(\gamma)\qquad \int F^2\,dv = \int V\frac{dV}{ds}\,d\sigma + 4\pi\int kV\,dv.$$

La surface S ne contenant aucune masse agissante, on a $k = 0$ dans tout le volume, et, par suite,

$$\int kV\,dv = 0.$$

D'autre part, le potentiel ayant une valeur constante V_1 sur la surface S, on a, en vertu du théorème II,

$$\int V\frac{dV}{ds}\,d\sigma = V_1\int\frac{dV}{ds}\,d\sigma = -4\pi V_1 Q = 0.$$

On en déduit

$$(\text{VII})\qquad \int F^2\,dv = 0.$$

Ainsi la force F est nulle, et par conséquent le potentiel constant, dans toute l'étendue du volume.

183. Corollaire. — *Lorsqu'un corps conducteur présente des cavités ne renfermant aucune masse agissante, toute l'électricité libre se porte sur la surface extérieure du corps comme si le corps était plein.* Sur la surface d'une cavité, le potentiel a une valeur constante V_1; supposons qu'en un point P de la cavité il ait une valeur différente a; sur chaque rayon allant de P à un point quelconque de la surface, le potentiel variant de a à V_1, on pourrait trouver un point M où le potentiel aurait une valeur donnée b, comprise entre a et V_1; le lieu des points M formerait une surface fermée, à laquelle on pourrait

appliquer le théorème précédent; le potentiel aurait la valeur constante b à l'intérieur de cette surface, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi le potentiel a, dans toute la cavité, la valeur constante V_1 qu'il a dans le corps conducteur, et par conséquent, en vertu du théorème IV, il n'y a pas d'électricité libre à la surface de la cavité. En outre, si l'on introduisait dans cette cavité un corps conducteur non électrisé, l'état de ce corps ne serait pas modifié.

Théorème VIII.

184. *Un système formé de masses électriques fixes données, et de charges électriques données sur des corps conducteurs, n'admet qu'un état d'équilibre.*

Considérons d'abord un système formé seulement de corps conducteurs A, B, C,..., isolés et tels, que chacun d'eux renferme des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative, je dis que le seul état d'équilibre est l'état neutre. Admettons en effet qu'il s'établisse un autre état d'équilibre, et appelons V_1, V_2, V_3,..., les valeurs constantes du potentiel dans les différents corps; soit V_1 la plus grande de ces quantités en valeur absolue; désignons par a une quantité constante comprise entre V_1 et zéro, et plus grande que chacune des autres quantités V_2, V_3,..., en valeur absolue. D'un point O pris arbitrairement sur la surface du corps A, menons des droites dans diverses directions; sur une droite qui ne rencontre aucun des corps, le potentiel variant de V_1 à zéro, on peut trouver un point M où le potentiel ait la valeur a; sur une droite rencontrant la surface de l'un des autres corps, B par exemple, le potentiel variant de V_1 à V_2, on peut trouver dans l'intervalle qui sépare les deux corps un point M où le potentiel ait aussi la valeur a; si la droite rencontrait d'abord la surface du corps A en un second ou en plusieurs points, on prendrait le point M au delà du dernier. On obtiendra ainsi une surface fermée S, sur laquelle le potentiel a la valeur constante a, et cette surface enveloppera le corps A en laissant tous les autres en dehors. Appliquons au volume en-

veloppé par cette surface la relation (γ) du numéro précédent, et remarquons que

$$\int V \frac{dV}{ds} d\sigma = a \int \frac{dV}{ds} d\sigma = -4\pi a Q_1,$$

Q_1 étant la somme algébrique des masses électriques enveloppées par la surface S. Puisque toutes ces masses sont situées sur le corps A, on a aussi

$$\int kV dv = V_1 \int k dv = V_1 Q_1;$$

l'équation (γ) devient donc

$$\int F^2 dv = 4\pi Q_1 (V_1 - a).$$

Mais dans le cas actuel, $Q_1 = 0$; on en conclut que F est nulle à l'intérieur de la surface S, et par conséquent, en vertu du théorème IV, que le corps A est à l'état neutre.

En faisant abstraction de ce corps neutre, on démontrera de même qu'un second corps est à l'état neutre, et ainsi de suite. Ainsi, dans le cas que nous considérons, l'état neutre est le seul état d'équilibre.

Étudions maintenant un système quelconque formé de masses électriques fixes $q, q', q'', \ldots$, appartenant à des corps non conducteurs, et de charges $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, répandues sur des corps conducteurs. Nous voulons démontrer qu'il n'y a qu'un état d'équilibre; admettons qu'il y en ait deux; appelons $h_1, h_2, \ldots$, les densités des couches répandues sur les corps conducteurs dans le premier état, $h'_1, h'_2, \ldots$, les densités dans le second état. Si l'on change les signes de toutes les masses électriques dans le second état, on aura un nouvel état d'équilibre $-q$, $-q', -q'', \ldots, -h'_1, -h'_2, \ldots$; ajoutant cet état au premier, on obtiendra un nouvel état d'équilibre, dans lequel les masses fixes q et $-q$, q' et $-q', \ldots$, se neutralisent, et la densité des diverses couches devient $h_1 - h'_1$, $h_2 - h'_2, \ldots$; la somme algébrique des quantités d'électricité qui forment chaque couche est nulle. On rentre alors dans le cas particulier que nous avons étudié d'abord; ce nouvel état est l'état neutre, et l'on

a $h'_1 = h_1$, $h'_2 = h_2, \ldots$: ainsi le système proposé ne peut présenter qu'un état d'équilibre.

Théorème IX.

185. Si dans la formule de Green, on permute les lettres U et V, et que l'on retranche membre à membre, il vient

$$(\delta) \qquad \int U\Delta V\,dv - \int V\Delta U\,dv = \int \left(U\frac{dV}{ds} - V\frac{dU}{ds}\right) d\sigma.$$

La fonction V désignant toujours le potentiel d'un système quelconque de masses électriques, supposons que U soit l'inverse $\frac{1}{r}$ de la distance d'un point quelconque du volume considéré à un point fixe P. On a, en remplaçant ΔV par sa valeur $-4\pi k$,

$$\int U\Delta V\,dv = -4\pi \int \frac{k\,dv}{r} = -4\pi V'_p,$$

V'_p représentant le potentiel sur le point P des masses comprises dans le volume. Considérons d'abord le cas où le point P est extérieur au volume ; la distance r ne devenant pas nulle, on a identiquement $\Delta U = \Delta \frac{1}{r} = 0$, et l'équation ($\delta$) se réduit à

$$(\text{IX}) \qquad \int \left(\frac{1}{r}\frac{dV}{ds} - V\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\right) d\sigma = -4\pi V'_p.$$

186. Supposons maintenant que le point P soit situé dans le volume limité par la surface S. Du point P comme centre avec un rayon très-petit r', décrivons une sphère S' ; nous pouvons appliquer l'équation précédente (IX) au volume compris entre les deux surfaces S et S' ; l'intégration doit être étendue aux deux surfaces. En ce qui concerne la surface S', on a $ds = -dr'$, $d\sigma = r'^2 d\omega$,

$$\int \left(\frac{1}{r}\frac{dV}{ds} - V\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\right) d\sigma = -\int \left(\frac{1}{r'}\frac{dV}{dr'} - V\frac{d\frac{1}{r'}}{dr'}\right) r'^2\,d\omega$$

$$= -r'\int \frac{dV}{dr'}\,d\omega - \int V\,d\omega.$$

Quand r' tend vers zéro, le premier terme du second membre tend vers zéro; le second terme, vers $-4\pi V_p$, V_p désignant le potentiel au point P de toutes les masses agissantes. D'ailleurs le potentiel V' des masses comprises entre les surfaces S et S' a pour limite le potentiel des masses enveloppées par la surface S; l'équation (IX) devient donc

$$(\mathrm{IX})' \qquad \int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{ds} - V\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\right)d\sigma = 4\pi(V_p - V'_p),$$

l'intégrale se rapportant uniquement à la surface S.

Si la surface S ne comprenait aucune masse agissante, on ferait $V'_p = 0$; si elle les comprenait toutes, on ferait $V'_p = V_p$.

187. Corollaire. — Supposons que la surface S soit une sphère de rayon R dont le point P occupe le centre; on a

$$ds = dR,$$

$$\int\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{ds} - V\frac{d\frac{1}{r}}{ds}\right)d\sigma = \frac{1}{R}\int\frac{dV}{ds}d\sigma + \frac{1}{R^2}\int V\,d\sigma;$$

mais, en vertu du théorème II,

$$\int\frac{dV}{ds}d\sigma = -4\pi q,$$

q étant la masse agissante contenue dans la sphère; l'équation (IX)' devient ainsi

$$(\mathrm{A}) \qquad \int V\,d\sigma = 4\pi R q + 4\pi R^2(V_p - V'_p).$$

Lorsque la sphère S ne renferme aucune masse agissante, on a $q = 0$, $V'_p = 0$, et l'équation précédente se réduit à

$$(a) \qquad \int V\,d\sigma = 4\pi R^2 V_p.$$

Si, au contraire, la sphère contient toutes les masses agis-

santes, on a $V'_p = V_p$, et l'équation devient

$$(b) \qquad \int V d\sigma = 4\pi RQ,$$

Q étant la somme de toutes les masses agissantes.

Théorème X.

188. *Lorsqu'une surface fermée enveloppe toutes les masses agissantes, et que sur cette surface le potentiel a une valeur constante, il a en chacun des points extérieurs une valeur comprise entre zéro et la valeur relative à cette surface de niveau.*

Supposons que la surface fermée S enveloppe toutes les masses agissantes, et que le potentiel ait sur cette surface une valeur constante positive a. Nous démontrerons d'abord que le potentiel conserve le même signe à l'extérieur; supposons en effet qu'en un point extérieur P le potentiel ait une valeur négative $-b$; sur chaque droite allant du point P à un point de la surface S, le potentiel variant de $-b$ à $+a$, on pourrait trouver un point M, où le potentiel aurait une valeur donnée $-b'$, comprise entre $-b$ et zéro; sur chaque droite indéfinie partant du point P, et ne rencontrant pas la surface S, le potentiel variant de $-b$ à zéro, on pourrait trouver un point jouissant de la même propriété. Le lieu de ces points formerait, autour du point P, une surface de niveau fermée S', ne comprenant aucune masse agissante; d'après le théorème VII, le potentiel serait constant dans tout l'intérieur, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il est impossible qu'en un point extérieur P le potentiel ait la valeur zéro; du point P comme centre, décrivons une sphère extérieure et tangente à S; d'après l'équation (a) du numéro précédent, on aurait

$$\int V d\sigma = 0;$$

le potentiel V conservant le même signe sur toute la surface de la sphère, il faudrait qu'il fût nul en chaque point de cette surface, ce qui est impossible.

Nous allons faire voir maintenant que le potentiel ne peut

avoir, en un point extérieur, une valeur égale ou supérieure à a. Car si cela était, il y aurait un ou plusieurs points P, où le potentiel aurait une valeur maximum c égale ou supérieure à a. De l'un de ces points P comme centre, décrivons, comme précédemment, une sphère extérieure et tangente à la surface S; d'après l'équation (a), on aurait

$$\int V d\sigma = 4\pi R^2 c,$$

et il serait nécessaire que sur toute la surface de la sphère le potentiel eût la valeur maximum c; ceci exigerait que $c = a$, et le potentiel aurait cette même valeur a dans tout l'intérieur de la sphère. D'un autre point P′ de cette première sphère, décrivons une seconde sphère extérieure et tangente à S; on démontrerait de la même manière que le potentiel devrait avoir la valeur constante a dans l'intérieur de cette seconde sphère. En continuant de cette manière, on arriverait à cette condition que le potentiel a la valeur constante a dans l'espace infini extérieur à la surface S, ce qui est impossible, puisqu'à l'infini le potentiel est nul. Ainsi, à l'extérieur de la surface S, le potentiel a une valeur comprise entre a et zéro.

Si, partant d'un point quelconque M de la surface S, on s'éloigne vers l'extérieur, le potentiel V commençe par diminuer; on arrivera à un point M′ voisin de M, où le potentiel aura une valeur donnée a' un peu plus petite que a, le lieu des points M′ formera une surface de niveau S′ enveloppant la première. En continuant de cette manière, on formera une série de surfaces de niveau s'enveloppant les unes les autres, et sur lesquelles le potentiel a des valeurs de plus en plus petites.

Il est un cas particulier qu'il importe de remarquer, c'est celui où le potentiel est nul sur la surface S; la première partie du raisonnement précédent suffit pour prouver qu'il est aussi nul dans tout l'espace extérieur.

Théorème XI.

189. *Lorsque, dans un système électrisé en équilibre, un corps conducteur enveloppe diverses masses électriques, la*

couche répandue sur la surface interne du corps et les masses électriques situées à l'intérieur, forment un système partiel en équilibre de lui-même et sans action à l'extérieur.

Revenons à la figure du n° 181, et appliquons le théorème IX à la surface fermée S que nous avons imaginée dans le corps conducteur A; le potentiel V de tout le système ayant une valeur constante V_1 dans le conducteur A, la dérivée $\frac{dV}{ds}$ est nulle sur la surface S, et le premier membre des équations (IX) et (IX)′ se réduit à

$$-\int V\frac{d\frac{1}{r}}{ds}d\sigma = -V_1\int\frac{d\frac{1}{r}}{ds}d\sigma.$$

La quantité $\frac{1}{r}$ peut être regardée comme le potentiel d'une masse égale à l'unité placée au point P; d'après la relation (II), l'intégrale

$$\int\frac{d\frac{1}{r}}{ds}d\sigma$$

est égale à zéro ou à -4π, suivant que le point P est situé à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface S. Dans le premier cas, l'équation (IX) se réduit donc à $V'_p = 0$; dans le second cas, l'équation (IX)′ donne $V'_p = V_p - V_1$. Mais V'_p est le potentiel au point P des masses électriques Q_1, q, q',... renfermées dans la surface S; comme on peut prendre la surface S aussi rapprochée que l'on veut de la surface interne du corps conducteur A, on en conclut que le potentiel du système formé par ces masses, dont la somme algébrique est nulle (n° 181), est constamment nul à l'extérieur; à l'intérieur, il est égal au potentiel total, diminué de la quantité constante V_1.

Il résulte de là que le système partiel Q_1, q, q',... est en équilibre de lui-même; d'abord son potentiel V′ a une valeur constante zéro dans le conducteur A; ensuite si q, q',... sont les charges de divers corps conducteurs placés à l'intérieur, le potentiel total V ayant une valeur constante dans chacun d'eux, le potentiel partiel V′ y a aussi une valeur constante. Cet équi-

libre partiel est celui qui s'établirait si le corps A communiquait avec le sol. Puisque son potentiel est nul à l'extérieur, le système partiel n'exerce aucune action à l'extérieur, et se comporte comme un corps neutre. Une bouteille de Leyde complète jouit de cette propriété.

Les autres masses électriques présentent évidemment un second équilibre, sans action intérieure; car le potentiel $V - V'$ de ce second système partiel est constant et égal à V_1 dans tout l'intérieur; ce second équilibre est celui qui s'établirait si le corps A était plein. L'équilibre général est donc la superposition de deux équilibres partiels. Par exemple, s'il n'y a pas d'autre masse électrique que celles qui sont enveloppées par le corps A, ou situées sur ce corps, la couche électrique Q_2 qui existe à sa surface externe est en équilibre d'elle-même : c'est ce qu'on appelle une *couche de niveau*.

190. Corollaire. — On peut généraliser le théorème précédent. Supposons que plusieurs systèmes analogues à A soient eux-mêmes enveloppés par un conducteur B; les masses électriques renfermées dans les corps A, A',... formant des équilibres partiels sans action extérieure, on peut en faire abstraction et se borner à considérer les couches Q_2, Q'_2,... répandues sur les surfaces externes de ces corps, comme s'ils étaient pleins; ces masses électriques avec la couche répandue sur la surface interne du conducteur enveloppant B formeront un nouveau système partiel en équilibre sans action à l'extérieur et aussi à l'intérieur des corps A, A',....

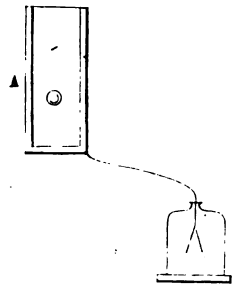
S'il n'y a pas d'autre masse électrique que celles qui sont enveloppées par le conducteur B ou situées sur ce corps, la couche répandue sur la surface externe du corps B est en équilibre d'elle-même : c'est une couche de niveau.

Il est bon de remarquer qu'une couche de niveau n'est formée que d'une seule espèce d'électricité; car la surface extérieure de la couche enveloppant toutes les masses électriques, en vertu du théorème X, le potentiel diminue en valeur absolue quand on s'éloigne de la surface en dehors; la dérivée $\frac{dV}{ds}$,

et, par suite, la densité h a donc le même signe en tous les points de la surface.

191. Les expériences de Faraday confirment ces résultats de la théorie. Faraday prend un cylindre conducteur isolé (*fig.* 50), dont la hauteur est beaucoup plus grande que le

Fig. 50.

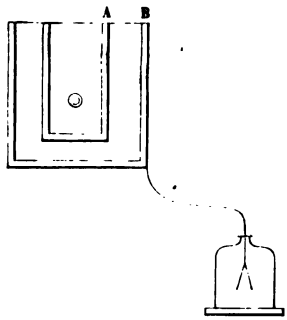


diamètre, et le met en relation avec un électroscope très-sensible. Il fait descendre dans ce cylindre une boule électrisée; les pailles de l'électroscope divergent; la divergence augmente d'abord, mais devient sensiblement constante quand la boule est située au-dessous d'un certain niveau; elle est alors indépendante de la position de la boule dans le cylindre, et reste encore la même quand on met la boule en contact avec le cylindre. En effet, lorsque le cône mené de la boule à l'ouverture du cylindre est suffisamment petit, le cylindre se comporte comme une enveloppe fermée, et la couche de niveau qui se forme à sa surface extérieure a une charge constante $+Q$ égale à celle de la boule.

Faraday a fait l'expérience d'une manière plus complète en employant deux cylindres concentriques A et B (*fig.* 51) parfaitement isolés, le dernier étant en communication avec un électroscope. Quand on introduit dans le cylindre A la boule chargée d'une quantité d'électricité $+Q$, la couche de niveau qui se forme sur la surface externe du cylindre B est la même que si le cylindre A n'existait pas, et l'écartement des pailles est le même que dans la première expérience. Quand on met

le cylindre A en communication avec le sol, la couche répandue sur la surface externe de ce cylindre disparaissant, le cylindre B cesse d'être électrisé, et les pailles reviennent au contact.

Fig. 51.



Théorème XII.

192. *L'action que des masses électriques données exercent à l'extérieur d'une surface fermée qui les enveloppe est la même que celle d'une couche de même masse répandue sur cette surface suivant une certaine loi.*

Soient q, q',... les masses électriques données dont nous appellerons la somme Q, et que nous supposerons fixes comme si elles appartenaient à des corps non conducteurs; une surface S de forme quelconque les enveloppe. Imaginons un corps conducteur limité intérieurement à la surface S et extérieurement à une surface quelconque S'. Sous l'influence des masses données, il se formera sur la surface S une couche électrique — Q, et sur la surface S' une couche + Q. D'après le théorème précédent, le potentiel de la couche — Q et des masses q, q',... est nul à l'extérieur de la surface S. Il en résulte que, dans cette région de l'espace, le potentiel de la couche — Q est égal et de signe contraire à celui des masses données. Convenons maintenant que l'on change le signe de la densité en chaque point de la couche — Q, nous aurons une couche Q répandue

sur la surface S et ayant à l'extérieur même potentiel que les masses données.

Cette couche, répandue sur la surface S, et qui a même action extérieure que les masses données, n'est pas en général une couche de niveau, c'est-à-dire n'est pas en équilibre d'elle-même. Pour qu'elle jouisse de cette propriété, il faudrait que son potentiel fût constant sur la surface S; mais le potentiel de la couche est égal à celui des masses données dans toute la région extérieure à la surface S, et par conséquent sur la surface S elle-même; il faudrait donc que la surface S fût une surface de niveau par rapport aux masses données.

Si la somme algébrique des masses électriques données était nulle, la couche équivalente formée sur la surface S serait composée de deux quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative; l'électricité positive occuperait une partie de la surface, l'électricité négative l'autre partie.

ÉLECTRISATION PAR INFLUENCE.

193. Considérons d'abord un corps conducteur A communiquant avec le sol, et soumis à l'action d'une masse électrique fixe q, placée en un point extérieur O. Sous l'influence de la masse électrique q, il se forme sur le corps une couche électrique telle, que le potentiel V de cette couche et de la masse q soit nul à l'intérieur d'un corps A. Dans le voisinage du point O, le terme $\frac{q}{r}$, l'emportant sur ceux relatifs à la couche, donne son signe au potentiel. Nous remarquerons d'abord que le potentiel conserve le même signe dans tout l'espace; car s'il avait en un point P un signe contraire à celui qu'il a dans le voisinage du point O, on pourrait former autour du point P une surface fermée ne comprenant aucune masse électrique, et sur laquelle le potentiel aurait une valeur constante comprise entre zéro et la valeur qu'il a en P : ce qui est impossible (n° 182).

Supposons que la masse électrique q soit positive, le

potentiel a une valeur nulle dans le corps A, et une valeur positive à l'extérieur; la valeur de la dérivée $\frac{dV}{dn}$ sur la surface vers l'extérieur est donc positive, et par conséquent la densité h de la couche est négative (n° 177). On en conclut que le corps conducteur A est chargé d'une quantité d'électricité q' de signe contraire à q.

Imaginons une sphère enveloppant à la fois le point O et le corps A; d'après l'équation (b) du n° 187,

$$4\pi R(q+q') = \int V d\sigma;$$

le potentiel ayant une valeur positive, l'intégrale a elle-même une valeur positive, et l'on a $q+q' > 0$. Ainsi, *la quantité d'électricité induite sur un corps conducteur communiquant avec le sol est égale ou inférieure à la quantité inductrice.* Elle lui est égale, comme nous l'avons vu au n° 181, lorsque le corps conducteur enveloppe la masse inductrice.

194. Cherchons le rapport $\frac{q'}{q}$ de la quantité d'électricité induite à la quantité inductrice. Considérons le volume compris entre une surface S, infiniment voisine du corps A et l'enveloppant, une petite sphère décrite du point O comme centre avec un rayon r, et une sphère décrite d'un point arbitraire P comme centre avec un très-grand rayon R, et appliquons à ce volume l'équation (δ) du n° 185,

$$\int (U\Delta V - V\Delta U)\, dv = \int \left(U\frac{dV}{ds} - V\frac{dU}{ds}\right) d\sigma,$$

dans laquelle nous supposerons que V désigne le potentiel précédent, et U le potentiel de la couche de niveau qui se formerait à la surface du corps A, si ce corps était isolé et électrisé, sans être soumis à l'action d'aucune masse électrique extérieure. L'intégrale dans le premier membre s'étend à un volume dans lequel n'est située aucune masse agissante; en chacun des points de ce volume on a donc $\Delta V = 0$, $\Delta U = 0$,

et par conséquent l'intégrale est identiquement nulle. L'intégrale dans le second membre doit être étendue aux trois surfaces qui limitent le volume considéré. Sur la grande sphère, les deux potentiels ont des valeurs très-petites, et peuvent être exprimés par des séries convergentes de la forme

$$U = \frac{a}{R} + \frac{b}{R^2} + \frac{c}{R^3} + \cdots,$$

$$V = \frac{a'}{R} + \frac{b'}{R^2} + \frac{c'}{R^3} + \cdots;$$

on en déduit

$$U\frac{dV}{dR} - V\frac{dU}{dR} = -\frac{2(ab' - ba')}{R^4} + \cdots;$$

comme, d'autre part, $d\sigma = R^2 d\omega$, on voit que l'intégrale relative à la grande sphère a pour limite zéro, quand R augmente indéfiniment.

Puisque, dans le corps A, V a une valeur nulle, et U une valeur constante U_1, et que l'élément de normale doit ici être porté en dedans, l'intégrale relative à la surface S se réduit à

$$-U_1 \int \frac{dV}{ds} d\sigma = 4\pi q' U_1.$$

Désignons par U_0 la valeur de U au point O, et posons

$$V = \frac{q}{r} + V',$$

V' étant le potentiel de la couche induite; si l'on remplace ds par $-dr$ et $d\sigma$ par $r^2 d\omega$, on reconnaît que l'intégrale relative à la petite sphère a pour limite $4\pi q U_0$. L'équation (δ) se réduit donc à

$$0 = 4\pi(q' U_1 + q U_0),$$

d'où

$$\frac{q'}{q} = -\frac{U_0}{U_1}.$$

Il en résulte que *la quantité d'électricité induite sur le corps*

conducteur A *communiquant avec le sol par une masse électrique donnée reste la même, quand cette masse se déplace sur une surface de niveau du corps* A *isolé,* et la quantité induite est d'autant plus petite que la surface de niveau est plus grande.

195. S'il y avait plusieurs masses électriques fixes agissant sur le corps conducteur A communiquant avec le sol, on chercherait la couche induite par chacune d'elles et on les superposerait.

Si le corps conducteur A était isolé, et primitivement à l'état neutre, à la couche Q' induite par les masses électriques données, quand le corps A communique avec le sol, on superposerait la couche de niveau $-Q'$, qui s'établirait à sa surface s'il était isolé, sans être soumis à l'action d'aucune masse électrique extérieure.

Enfin, si le corps A était isolé et chargé primitivement d'une quantité d'électricité donnée Q_1, à la charge induite Q' on superposerait la couche de niveau $Q_1 - Q'$.

On peut trouver aisément des exemples d'équilibre de cette sorte. Soit V le potentiel de masses fixes données $q, q_1, \ldots, q', q'_1, \ldots$, S une surface de niveau qui enveloppe une partie d'entre elles, par exemple $q', q'_1, \ldots$. On peut remplacer les masses $q', q'_1, \ldots$ par une couche égale répandue sur la surface S (n° 192); si l'on appelle V' le potentiel des masses $q, q_1, \ldots$, V'' celui des masses $q', q'_1, \ldots$, le potentiel de la couche et des masses $q, q_1, \ldots$ à l'extérieur de S étant égal à $V'+V''=V$, sera constant sur la surface S, et par conséquent cette couche est en équilibre sous l'influence des masses $q, q_1, \ldots$.

196. Considérons maintenant l'influence réciproque de deux corps conducteurs A et B isolés, et chargés primitivement de quantités d'électricité données Q_1 et Q_2. On ramène ce cas général à des cas plus simples par la méthode de Murphy. Soit q_1 la couche de niveau qui, répandue sur A, y produit le potentiel 1; cette couche, supposée fixe, induira sur B, communiquant avec le sol, une couche $-q_2$. La couche $-q_2$

:e fixe, induira à son tour sur A, communiquant avec
ne couche q_3; cette dernière, supposée fixe, induira
:ommuniquant avec le sol, une couche $-q_4$, et ainsi
indéfiniment. Superposons ces diverses couches, nous
ıur A une couche

$$Q'_1 = q_1 + q_3 + q_5 + \ldots,$$

ıe couche

$$-Q'_2 = -q_2 - q_4 - q_6 - \ldots;$$

ıcile de voir que les deux couches Q'_1 et $-Q'_2$ ont
le un potentiel égal à 1 sur A, à zéro sur B, et par
ıent sont en équilibre sous leur action mutuelle.
ême, soit q'_1 la couche de niveau qui, répandue sur B,
it le potentiel 1. Cette couche, supposée fixe, induira
:ommuniquant avec le sol, une couche $-q'_2$; celle-ci,
e fixe, induira sur B, communiquant avec le sol, une
q'_3, et ainsi de suite indéfiniment. Les deux couches

$$-Q''_2 = -q'_2 - q'_4 - \ldots,$$
$$Q''_1 = q'_1 + q'_3 + \ldots,$$

es sur A et B, ont ensemble un potentiel égal à 1
zéro sur A, et, par conséquent, constituent un nouvel
quilibre.
:vons maintenant que l'on multiplie la densité en
point dans le premier état d'équilibre par V_1, la densité
ue point dans le second état par V_2, les quantités V_1
tisfaisant aux deux équations

$$V_1 Q'_1 - V_2 Q''_2 = Q_1,$$
$$-V_1 Q'_2 + V_2 Q''_1 = Q_2,$$

l'on superpose les deux nouveaux états d'équilibre
ıtenus, on aura l'état d'équilibre réciproque des deux
:s d'électricité données Q_1 et Q_2, répandues sur A et B.
:ntiel de l'ensemble aura les valeurs constantes V_1
V_2 sur B. Si l'on donnait les valeurs V_1 et V_2 du poten-

tiel sur A et B, les mêmes équations détermineraient les couches Q_1 et Q_2.

On peut trouver, comme précédemment, des exemples d'équilibre de cette nouvelle espèce. Soit V le potentiel de masses fixes données, S et S′ deux surfaces de niveau qui enveloppent, la première une partie des masses q, q_1,..., la seconde toutes les autres q', q'_1,.... On peut remplacer les masses q, q_1,... par une couche égale répandue sur la surface S, et de même les masses q', q'_1,..., par une couche égale répandue sur S′; le potentiel de l'ensemble de ces deux couches à l'extérieur est égal à $V' + V'' = V$; il a une valeur constante sur S et une autre valeur constante sur S′, et, par conséquent, les deux couches sont en équilibre sous l'influence de leur action mutuelle.

CHAPITRE III.

TRAVAIL DES FORCES ÉLECTRIQUES.

Travail des forces électriques. — Énergie électrique. — Décharge d'une bouteille de Leyde. — Décharge d'une batterie. — Travail des forces magnétiques.

---

197. Le jeu des machines électriques développe des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative. Quand les corps électrisés sont bons conducteurs, si on les met ensuite en communication les uns avec les autres, toute électricité libre disparaît, et le système revient à l'état neutre. Lorsque, par une cause quelconque, il y a déplacement des fluides électriques, ou mouvement des corps électrisés eux-mêmes, ce changement dans l'état du système est accompagné d'un travail des forces électriques. Si l'on appelle dq et dq' deux masses électriques infiniment petites, r leur distance mutuelle, le travail élémentaire des forces électriques a pour expression

$$d\mathfrak{T} = \sum \frac{dq\,dq'}{r^2}\,dr = -d\sum \frac{dq\,dq'}{r},$$

le signe somme s'étendant à toutes les combinaisons des masses électriques deux à deux. Nous poserons

$$W = \sum \frac{dq\,dq'}{r},$$

ce qui donne

$$d\mathfrak{T} = -dW.$$

Lorsque le système passe de l'état 1 à l'état 2, le travail des forces électriques est

$$\mathfrak{T} = W_1 - W_2.$$

ÉNERGIE ÉLECTRIQUE.

198. La valeur de la fonction W, dans un état quelconque du système, est le travail que développeraient les forces électriques, si le système revenait à l'état neutre; car on aurait, dans ce cas, $W_2 = 0$ et, par suite, $\mathfrak{E} = W_1$. Le système revenant de lui-même à l'état neutre, quand on établit la communication, on en conclut que la quantité W a toujours une valeur positive. Nous l'appellerons, par analogie, *énergie potentielle du système électrisé*, ou, plus simplement, *énergie électrique*.

Inversement, pour électriser le système par le mouvement d'une machine, il faut dépenser une quantité de travail moteur égale à l'énergie potentielle qu'on veut lui communiquer. En général, le travail des forces électriques, pour un changement quelconque, est égal à la variation qu'éprouve l'énergie potentielle, quand on passe du premier état au second.

L'énergie électrique est une nouvelle forme de l'énergie. Lorsqu'on charge une batterie électrique, on transforme une certaine quantité de travail, ou d'énergie mécanique, en une quantité égale d'énergie électrique, et réciproquement, dans la décharge de la batterie, une certaine quantité d'énergie électrique se transforme en une quantité égale d'énergie mécanique ou d'énergie calorifique.

199. On peut exprimer l'énergie potentielle W d'un système de masses électriques à l'aide de la fonction V, que nous avons nommée *le potentiel du système*. La somme

$$W = \sum \frac{dq\,dq'}{r}$$

renferme les combinaisons de toutes les masses élémentaires deux à deux. Considérons les combinaisons d'une masse élémentaire déterminée dq avec chacune des autres masses, nous obtiendrons la somme partielle

$$dq \sum \frac{dq'}{r}.$$

ais $\sum \frac{dq'}{r}$ est la valeur du potentiel V de tout le système au oint où est située la masse dq; la somme partielle est donc dq. De même, les combinaisons d'une autre masse détermi-ée dq' avec chacune des autres donneront la somme partielle $' dq'$, V' étant la valeur du potentiel au point où est placée la asse dq'; on a ainsi $Vdq + V'dq' + \ldots$ ou $\sum Vdq$. Mais, de ette manière, chaque combinaison a été répétée deux fois; ar exemple, la combinaison des deux masses dq et dq' est ntrée, une première fois, dans la somme partielle Vdq, une econde fois dans $V'dq'$. Il faut donc prendre la moitié du ésultat, et l'on a la relation

$$) \qquad W = \frac{1}{2} \sum Vdq \text{ (*)}.$$

200. Considérons un système de corps conducteurs A, B, ,..., sur lesquels sont répandues des charges électriques Q_1, Q_2, Q_3,.... L'équilibre électrique étant établi, le poten-iel a une valeur constante V_1 dans le corps A, une autre va-eur constante V_2 dans le corps B,.... Dans la somme $\sum Vdq$, es termes, qui se rapportent aux différentes masses électri-ques répandues sur le corps A, donnent une somme partielle $V_1 \sum dq$ ou $V_1 Q_1$; de même, les termes qui se rapportent aux nasses électriques répandues sur le corps B, donnent la somme partielle $V_2 Q_2$,...; la relation (1) devient ainsi

$$(2) \qquad W = \frac{1}{2} (V_1 Q_1 + V_2 Q_2 + \ldots).$$

Remarquons que, si un corps est resté complétement isolé pendant qu'on a chargé le système, et par conséquent n'a été

(*) La quantité $\sum Vdq$ est ce que Beer appelle *le potentiel des masses électriques sur elles-mêmes*, de sorte que ce que j'appelle ici *l'énergie potentielle des masses électriques* n'est autre chose que la moitié de ce potentiel.

électrisé que par influence, ce corps contenant des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative, sa charge Q est nulle, ainsi que le terme correspondant de l'énergie.

Si l'un des corps communique avec la terre, la terre et ce corps réunis seront regardés comme l'un des corps du système; à cause de la grandeur du globe terrestre, le potentiel y est sensiblement nul. Comme la quantité d'électricité libre développée par la machine a une valeur finie, le terme correspondant dans l'expression de l'énergie est aussi nul. Ainsi, les corps électrisés par influence, et ceux qui communiquent avec la terre, donnent des termes nuls dans l'expression de l'énergie potentielle du système.

Il est clair que la quantité de travail nécessaire pour communiquer à un corps une charge électrique donnée est minimum, lorsque le corps est parfaitement conducteur; car, si l'on imagine une autre distribution à l'aide de résistances intérieures, telles que celles qui existent dans les corps imparfaitement conducteurs, et que l'on suppose ensuite que ces résistances diminuent peu à peu, le fluide reviendra à la première distribution, en surmontant les résistances, et par conséquent accomplissant un travail positif.

DÉCHARGE D'UNE BOUTEILLE DE LEYDE.

201. Considérons une bouteille de Leyde à armatures complètes. On met l'armature intérieure en communication avec une source d'électricité qui possède un potentiel V_1, et l'armature extérieure avec le sol; quand la bouteille est chargée à refus, l'armature intérieure a acquis le même potentiel V_1, et s'est chargée d'une quantité $+ Q_1$ d'électricité. Il s'est produit sur l'armature extérieure une charge égale $- Q_1$ d'électricité contraire, et sur cette armature le potentiel V_2 est nul. La bouteille présente alors un état particulier d'équilibre que nous avons étudié au n° 189; son potentiel à l'extérieur étant nul, elle n'exerce aucune action sur les corps environnants et se comporte à leur égard comme un corps neutre. Cependant

elle renferme une quantité d'énergie égale à

$$W = \frac{1}{2} V_1 Q_1.$$

Nous avons trouvé (n° 180)

$$Q_1 = \frac{V_1 S_1}{4\pi e_1};$$

si l'on désigne par λ le rapport $\frac{4\pi e_1}{S_1}$, qui est une constante pour la bouteille donnée, on a

$$V_1 = \lambda Q_1,$$

et, par suite,

$$W = \frac{1}{2} \lambda Q_1^2.$$

Ainsi *l'énergie potentielle d'une bouteille de Leyde est proportionnelle au carré de la charge.*

Cette énergie se manifeste lorsqu'on réunit les deux armatures par un excitateur; la bouteille se décharge complétement, et il y a production d'une quantité de travail $\frac{1}{2} \lambda Q_1^2$, qui se traduit par une étincelle et par un échauffement du fil de communication.

Une partie de l'énergie intérieure est employée à vaincre la résistance de l'air, c'est-à-dire à produire l'étincelle; le reste se change en énergie calorifique.

Quand le fil de communication est gros et court, l'étincelle est énergique, et l'échauffement du conducteur très-faible. Quand le fil est long et fin, l'étincelle est faible, mais le fil s'échauffe davantage.

Plusieurs expériences confirment les résultats de cette théorie. M. Riess a interposé une lame de mica ou une carte sur le passage de l'étincelle, et il a constaté qu'alors l'échauffement du fil est plus faible. La résistance à vaincre étant plus grande, l'étincelle a absorbé une plus grande partie de l'énergie.

Si l'on réunit les deux armatures par un fil très-long et très-fin, l'étincelle devient très-faible et le travail correspondant négligeable. En opérant dans ces conditions, M. Riess a trouvé, bien avant la théorie, que, si l'on donne à une même bouteille des charges différentes, la quantité de chaleur dégagée est proportionnelle au carré de la charge.

DÉCHARGE D'UNE BATTERIE.

202. Considérons une batterie formée de n bouteilles identiques. On les charge séparément avec une même source; chacune d'elles prend une charge q_1, et l'on a, en appelant V_1 le potentiel sur la source,

$$V_1 = \lambda q_1.$$

Si l'on réunit alors toutes ces bouteilles, l'équilibre subsiste, puisqu'elles n'exercent aucune action les unes sur les autres, et que le potentiel est le même sur toutes les armatures intérieures. La charge totale est la même que si la batterie avait été mise directement en relation avec la source. L'énergie potentielle de la batterie est donnée par la formule

$$W = \frac{1}{2} n V_1 q_1 = \frac{1}{2} V_1 Q_1,$$

Q_1 désignant la charge totale de la batterie.

Une batterie électrique de n bouteilles égales est donc équivalente à une bouteille unique de même épaisseur, dont la surface serait n fois plus grande que la surface de chacune des bouteilles qui la composent.

On en déduit aussi

$$W = \frac{1}{2} \lambda \frac{Q_1^2}{n}.$$

L'énergie d'une batterie est proportionnelle au carré de la charge et en raison inverse du nombre des bouteilles. Cette loi a été découverte expérimentalement par M. Riess.

203. Étudions maintenant les décharges incomplètes. Prenons deux batteries, l'une de n bouteilles, l'autre de n' bou-

teilles, toutes identiques. Chargeons la première batterie à refus, comme à l'ordinaire; l'énergie potentielle de cette batterie est alors

$$W = \frac{1}{2} n V_1 q_1.$$

La deuxième batterie étant à l'état neutre, on réunit les armatures intérieures des deux batteries; la charge nq_1 se répand alors sur les $n + n'$ bouteilles, et chacune d'elles prend une charge

$$q'_1 = \frac{nq_1}{n + n'}.$$

On a maintenant une nouvelle batterie composée de $n + n'$ bouteilles; sur les armatures intérieures le potentiel est

$$V'_1 = \lambda q'_1 = \frac{n\lambda q_1}{n + n'} = V_1 \frac{n}{n + n'};$$

son énergie potentielle est

$$W' = \frac{1}{2}(n + n') V'_1 q'_1 = W \frac{n}{n + n'}.$$

Le travail accompli pendant cette transformation est égal à la diminution $W - W'$ d'énergie potentielle

$$W - W' = W \frac{n'}{n + n'}.$$

Cette formule avait été trouvée aussi par M. Riess à l'aide de l'expérience.

204. Étudions encore la charge par cascade. Supposons plusieurs batteries réunies en cascade, la première comprenant n_1 bouteilles, la seconde n_2, la troisième n_3,.... Toutes ces boutelles sont identiques; l'armature extérieure de la dernière batterie communique avec le sol, l'armature intérieure de la première avec une source dont le potentiel est V_1. L'armature intérieure de la première batterie prend une charge $+Q_1$; il se produit une charge $-Q_2$ sur l'armature extérieure de la première batterie et une charge $+Q_2$ sur l'armature in-

térieure de la seconde, le potentiel sur ces deux conducteurs réunis étant V_2; de même, il y a une charge $-Q_3$ sur l'armature extérieure de la seconde et une charge $+Q_3$ sur l'armature intérieure de la troisième, le potentiel étant $V_3, \ldots$; le potentiel sur la dernière armature est nul. On aura donc

$$W = \frac{1}{2}(V_1 Q_1 - V_2 Q_2 + V_2 Q_2 - V_3 Q_3 + V_3 Q_3 - \ldots),$$

ou

$$W = \frac{1}{2} V_1 Q_1,$$

ce qui est évident *à priori*, d'après une remarque faite au n° 200.

Pour une bouteille dont la charge est q_1, on a, en général, d'après la relation trouvée au n° 180,

$$q_1 = \frac{(V_1 - V_2)S_1}{4\pi e_1},$$

V_1 et V_2 étant les valeurs du potentiel sur l'armature intérieure et sur l'armature extérieure; si l'on pose, comme précédemment, $\lambda = \frac{4\pi e_1}{S_1}$, on en déduit

$$V_1 - V_2 = \lambda q_1.$$

Dans la première batterie, la charge de chaque bouteille étant égale à $\frac{Q_1}{n_1}$, on a

$$V_1 - V_2 = \lambda \frac{Q_1}{n_1}.$$

On obtient de même, pour les batteries suivantes,

$$V_2 - V_3 = \lambda \frac{Q_2}{n_2},$$

$$V_3 - V_4 = \lambda \frac{Q_3}{n_3},$$

et, pour la dernière,

$$V_m - 0 = \lambda \frac{Q_m}{n_m}.$$

En ajoutant toutes ces équations membre à membre, il vient

$$V_1 = \lambda \left(\frac{Q_1}{n_1} + \frac{Q_2}{n_2} + \frac{Q_3}{n_3} + \ldots \right).$$

Supposons encore les bouteilles parfaitement fermées; alors les charges des deux armatures de chacune d'elles sont égales, et l'on a

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots,$$

d'où

$$V_1 = \lambda Q_1 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots \right),$$

et

$$W = \frac{1}{2} \lambda Q_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots \right).$$

Telle est l'énergie potentielle de l'ensemble des batteries; c'est le travail qu'il faut dépenser pour les charger, ou la chaleur dégagée pendant la décharge. M. Riess avait trouvé, par l'expérience, pour deux batteries,

$$W = \frac{1}{2} \lambda Q_1^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right).$$

TRAVAIL DES FORCES MAGNÉTIQUES.

205. Les considérations précédentes s'appliquent aux corps aimantés; dans les idées de Coulomb, on admet qu'il existe deux fluides magnétiques, analogues aux fluides électriques; l'aimantation consiste dans la séparation de ces deux fluides; mais, tandis que les fluides électriques peuvent se séparer effectivement et passer d'un corps dans un autre, la séparation des fluides magnétiques ne s'opère que dans les particules du corps, de sorte que chacune d'elles contient toujours des quantités égales des deux fluides. La loi de l'action étant toujours celle du carré de la distance, on évaluera le travail des forces magnétiques, comme on a évalué celui des forces électriques, à l'aide de la fonction

$$W = \sum \frac{dq\, dq'}{r}.$$

Considérons un système formé de deux corps aimantés A et B; la fonction W se compose de trois parties, les deux premières, que nous désignerons par W_a et W_b, se rapportant à l'action de chacun des aimants sur lui-même; la troisième, $W_{a,b}$, à l'action des deux aimants l'un sur l'autre. Si l'on appelle V_a et V_b les potentiels des deux aimants, on a

$$W_a = \frac{1}{2}\int V_a\,dq, \quad W_b = \frac{1}{2}\int V_b\,dq',$$

$$W_{a,b} = \int V_a\,dq' = \int V_b\,dq,$$

dq désignant un élément du premier aimant, dq' un élément du second. Si les deux aimants sont constants, leurs énergies W_a, W_b restant constantes, le travail provient uniquement du mouvement relatif des deux aimants, et l'on a

$$d\mathfrak{T} = -\,d\,W_{a,b}.$$

Nous avons vu (n° 192) que l'action extérieure d'un système de masses électriques données est égale à celle d'une couche égale répandue, suivant une certaine loi, sur une surface qui les enveloppe. L'action extérieure d'un aimant est donc la même que celle d'une couche répandue sur la surface de l'aimant et formée de quantités égales des deux fluides; on pourra donc, dans le calcul de l'action extérieure d'un aimant, substituer cette couche à l'aimant.

CHAPITRE IV.

HYPOTHÈSE D'UN SEUL FLUIDE.

206. La théorie des phénomènes d'électricité statique repose tout entière sur la loi de Coulomb. Les théorèmes que nous avons démontrés, et qui ont été vérifiés par l'expérience, sont la conséquence de cette loi fondamentale. Pour énoncer la loi de Coulomb, et les conséquences que nous en avons déduites, nous nous sommes servi de l'hypothèse des deux fluides électriques; mais il est clair que ce n'est là qu'une manière de parler, et que la vérité de la théorie est indépendante de cette hypothèse, ou de toute autre que l'on pourrait faire sur la nature de l'électricité.

Dans le siècle dernier, Franklin est parvenu à représenter les phénomènes d'électricité statique à l'aide d'un seul fluide; mais alors il faut faire intervenir l'action de la matière pondérable. Chaque élément de volume est considéré comme renfermant une certaine quantité de matière pondérable et une quantité de fluide électrique. On admet qu'il y a attraction entre deux masses de matière pondérable et aussi entre la matière pondérable et la matière électrique, répulsion entre deux masses de matière électrique, et que ces forces varient toutes en raison inverse du carré de la distance.

Considérons d'abord l'action d'un élément de volume A renfermant une masse pondérable M, et une masse électrique μ sur une masse électrique m' placée à la distance r. Cette action se compose de deux forces, l'une attractive $\frac{f_1 M m'}{r^2}$, l'autre répulsive $\frac{f_2 \mu m'}{r^2}$; leur résultante est

$$\frac{(f_1 M - f_2 \mu) m'}{r^2}.$$

Si l'on a $f_1 M - f_2 \mu = 0$, ou $\frac{\mu}{M} = \frac{f_1}{f_2}$, la résultante est nulle, et l'élément A est dit à l'état *neutre;* cet élément n'exerce aucune action sur la matière électrique environnante. Si l'on suppose que le coefficient f_2 soit très-grand par rapport à f_1, la masse électrique μ sera très-petite par rapport à la masse pondérable M. Ainsi un corps est à l'état neutre, lorsque la quantité de matière électrique qu'il renferme est dans un rapport déterminé avec la quantité de matière pondérable.

207. Considérons maintenant l'action mutuelle de deux éléments de volume A et B à l'état neutre; le premier renferme une masse pondérable M et une masse électrique μ, le second une masse pondérable M′ et une masse électrique μ', et l'on a

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\mu'}{M'} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Cette action est la résultante de quatre forces

$$\frac{fMM'}{r^2} + \frac{f_1 M\mu'}{r^2} + \frac{f_1 M'\mu}{r^2} - \frac{f_2 \mu\mu'}{r^2},$$

savoir : l'attraction des masses pondérables M et M′, l'attraction de la masse pondérable M sur la masse électrique μ', l'attraction de la masse pondérable M′ sur la masse électrique μ, et enfin la répulsion des masses électriques μ et μ'. Cette résultante se réduit à

$$\frac{MM'}{r^2}\left(f + \frac{f_1^2}{f_2}\right).$$

Si l'on représente par φ la constante $f + \frac{f_1^2}{f_2}$, elle se met sous la forme simple

$$\frac{\varphi MM'}{r^2};$$

c'est l'attraction universelle, ou la gravitation.

208. Un corps *électrisé* est un corps qui renferme une quantité de matière électrique plus grande ou plus petite que la

quantité que nous venons de définir, et qui constitue l'état neutre. Il est électrisé, positivement si la matière électrique est en excès, négativement si elle est en défaut.

Cherchons l'action mutuelle de deux éléments de volume électrisés A et B, renfermant, le premier une masse pondérable M et une masse électrique $\frac{f_1 M}{f_2} + m$, le second une masse pondérable M′ et une masse électrique $\frac{f_1 M'}{f_2} + m'$; cette action est la résultante des quatre forces

$$\frac{f M M'}{r^2} + \frac{f_1 M \left(\frac{f_1 M'}{f_2} + m'\right)}{r^2} + \frac{f_1 M' \left(\frac{f_1 M}{f_2} + m\right)}{r^2}$$
$$- \frac{f_2 \left(\frac{f_1 M}{f_2} + m\right)\left(\frac{f_1 M'}{f_2} + m'\right)}{r^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{M M'}{r^2}\left(f + \frac{f_1^2}{f_2}\right) - \frac{f_2 m m'}{r^2},$$

ou

$$\frac{\varphi M M'}{r^2} - \frac{f_2 m m'}{r^2}.$$

Le premier terme $\frac{\varphi M M'}{r^2}$ est la gravitation, le second $-\frac{f_2 m m'}{r^2}$ l'action électrique. En faisant abstraction de la gravitation, et ne considérant que l'action électrique, on voit qu'il y a répulsion si les corps sont électrisés dans le même sens, attraction s'ils sont électrisés en sens contraires. L'expression $-\frac{f_2 m m'}{r^2}$ de la force électrique ne dépend que des excès positifs ou négatifs m et m'; ces excès sont ce que nous appellerons *les quantités d'électricité libre*, contenues dans les volumes A et B. On retrouve ainsi la loi de Coulomb. L'hypothèse d'un seul fluide, combinée avec l'action de la matière pondérable, rend donc compte des phénomènes, exactement de la même manière que s'il y avait deux fluides différents.

On pourrait même se dispenser d'admettre qu'il y a attraction entre deux masses de matière pondérable; l'attraction de la matière pondérable sur la matière électrique suffirait pour produire la gravitation. Ceci revient à supposer $f = 0$; d'où $\varphi = \frac{f_1^2}{f_2}$.

209. Si l'on adopte comme plus probable l'hypothèse d'un seul fluide, il est naturel de supposer que ce fluide n'est autre chose que l'éther, par les vibrations duquel on explique les phénomènes lumineux. Toutefois l'expérience apprend qu'il n'y a pas de phénomènes électriques dans le vide, c'est-à-dire en l'absence de toute matière pondérable. Il semble résulter de là que l'on doit appeler *fluide électrique* contenu dans un volume donné, non pas la quantité totale d'éther qu'il renferme, mais la somme des atmosphères d'éther qui entourent les molécules pondérables (n° 2), c'est-à-dire l'excès de la quantité totale d'éther que contient le volume sur la quantité qu'il contiendrait sans la présence des molécules pondérables. Pour expliquer les phénomènes électriques, il suffira d'admettre que la matière pondérable attire l'éther en raison inverse du carré de la distance, et que l'action mutuelle de deux atmosphères d'éther est proportionnelle au produit de leurs masses et aussi en raison inverse du carré de la distance.

Nous ferons remarquer, à ce propos, que la théorie des phénomènes lumineux semble exiger une loi d'action toute différente entre les molécules voisines de l'éther. L'énorme vitesse de propagation des ondes lumineuses indique d'abord que la force qui s'exerce entre deux molécules voisines est très-énergique. Les recherches théoriques de Cauchy montrent que, dans un milieu isotrope, comme l'éther libre répandu dans le vide, peuvent se propager deux sortes de vibrations, les unes transversales, les autres longitudinales, avec des vitesses très-différentes; l'existence des unes et des autres dépend de la loi des forces moléculaires. On attribue les phénomènes lumineux aux vibrations transversales. En suivant la méthode de Cauchy, j'ai fait voir que, pour que les vibrations

ansversales puissent se propager, il est nécessaire que la orce répulsive qui s'exerce entre deux molécules voisines éther varie en raison inverse d'une puissance de la distance lus élevée que la quatrième. L'étude des lois de la propagaon de la lumière dans les milieux biréfringents semble indiuer que cette puissance est précisément la sixième, et l'abence de dispersion dans le vide conduit à la même concluon. Il y a contradiction apparente entre ces deux lois; mais est probable que les phénomènes lumineux sont dus à l'acon immédiate des molécules d'éther sur les molécules les lus voisines, tandis que, dans l'ordre d'idées où nous nous laçons actuellement, la force électrique proviendrait de l'acon de ressort ou de l'élasticité des atmosphères d'éther qui ntourent les molécules pondérables.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

Considérations préliminaires. — Loi de Ohm. — Conducteurs linéaires. — Travail des forces électromotrices. — Loi de Joule.

CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

210. Lorsque, dans un corps conducteur, le potentiel a la même valeur en chaque point, il y a équilibre électrique; mais si cette fonction n'a pas la même valeur en chaque point, il y a mouvement de l'électricité. Ce mouvement constitue le phénomène des courants. Lorsque le potentiel est une fonction de x, y, z, indépendante du temps, le mouvement électrique arrive presque instantanément à un régime régulier et permanent; c'est le cas que nous nous proposons d'étudier en ce moment.

La force qui agit en chaque point sur l'unité de masse, pour produire le mouvement électrique, est $-\frac{dV}{dn}$, dn étant un élément de la normale à la surface de niveau qui passe en ce point; on lui a donné le nom de *force électromotrice*. L'électricité, se mouvant à travers le réseau des molécules pondérables, choque ces molécules et leur communique une partie de sa force vive, ce que l'on reconnaît par l'échauffement du conducteur. On peut évaluer l'effet moyen de cette communication de force vive, comme dans le frottement ordinaire, à l'aide d'une résistance fictive opposée par le milieu pondérable, et dirigée en sens contraire de la vitesse. On considérera donc chaque masse infiniment petite m d'électricité comme sollicitée par deux forces, la force électromotrice $F = -m\frac{dV}{dn}$,

qui agit sur elle, et la résistance R du milieu pondérable. L'expérience apprend que, dès que la force électromotrice cesse d'agir, c'est-à-dire dès que le potentiel devient constant, le mouvement de l'électricité s'arrête aussitôt. Les choses se passent comme lorsqu'un corps se meut dans un milieu résistant dont la densité est très-grande par rapport à celle du corps.

211. Au moment où la force F cesse d'agir, la masse électrique m est animée d'une vitesse u et possède une force vive $\frac{mu^2}{2}$; elle n'est plus soumise alors qu'à la résistance du milieu pondérable, et, après avoir parcouru un chemin rectiligne très-petit l, elle s'arrête. Le travail de la résistance pendant ce trajet étant égal à la force vive, on a l'équation

$$\int R' ds = \frac{mu^2}{2},$$

dans laquelle ds désigne un élément de chemin parcouru, et R' la résistance décroissante. Cette résistance R' étant plus petite que la résistance R qui correspond à la vitesse u, l'intégrale est moindre que Rl, et par conséquent on a $R > \frac{mu^2}{2l}$.

Considérons maintenant un courant permanent dans un fil d'égale section et disposé suivant un cercle de rayon L; la masse électrique m est animée d'un mouvement circulaire et uniforme, dont l'accélération est dirigée vers le centre et égale à $\frac{u^2}{L}$; la résultante des deux forces F et R qui sollicitent la masse m est dirigée suivant le rayon et égale à $\frac{mu^2}{L}$; la force R étant plus grande que $\frac{mu^2}{2l}$, le rapport de la résultante à cette force R est moindre que $\frac{2l}{L}$; c'est un rapport très-petit, si, comme nous l'admettons, la distance l parcourue pendant que le courant s'arrête est très-petite relativement à L. La diagonale du parallélogramme étant très-petite par rapport à l'un des côtés R, les deux forces F et R sont à peu près égales et opposées.

Puisque la résistance R est dirigée en sens contraire de la vitesse, on en conclut que la direction de la vitesse u coïncide sensiblement avec celle de la force électromotrice F.

Il résulte de là qu'une masse électrique quelconque m décrit dans le conducteur une ligne à peu près orthogonale aux surfaces de niveau. Si l'on conçoit le volume du conducteur décomposé en une série de canaux orthogonaux ayant pour sections les divers éléments $d\omega$ d'une surface de niveau, le mouvement s'opérant dans chacun d'eux séparément, on pourra regarder le mouvement général de l'électricité dans le conducteur comme la réunion de tous ces courants linéaires. Les masses électriques voisines de la surface du conducteur ayant des vitesses parallèles à cette surface, il en résulte que les surfaces de niveau coupent orthogonalement la surface du conducteur.

212. L'hypothèse d'un fluide unique se prête, aussi bien que celle des deux fluides, à l'établissement de la théorie. Si l'on adopte l'hypothèse d'un fluide unique, on supposera que ce fluide, sollicité par la force électromotrice, se meut dans le sens de la force; on pourra, si l'on veut, comparer le mouvement du fluide électrique dans l'un des canaux linéaires au mouvement de l'eau dans un tuyau : l'intensité du courant est la quantité de fluide di qui traverse la section $d\omega$ du canal pendant l'unité de temps.

Dans l'hypothèse des deux fluides, comme la force électromotrice les sollicite dans des sens contraires, on devra admettre la coexistence de deux courants dans le même canal, l'un de fluide positif marchant dans un sens, l'autre de fluide négatif marchant en sens opposé. De plus, comme la force électromotrice agit avec une égale énergie sur des masses égales des deux fluides, et que ces deux fluides se trouvent dans les mêmes conditions, des quantités égales $\frac{di}{2}$ des deux fluides traverseront la section $d\omega$ du canal pendant l'unité de temps; l'intensité de chaque courant étant égale à $\frac{di}{2}$, celle du double courant sera di.

LOI DE OHM.

213. On admet que la quantité d'électricité, qui traverse pendant l'unité de temps un élément $d\omega$ d'une surface de niveau, est proportionnelle à la force électromotrice $-\frac{dV}{dn}$, qui s'exerce à l'endroit où est situé l'élément; de sorte que, si l'on désigne par a une constante dépendant de la nature du conducteur, on aura

$$\text{(I)} \qquad di = -a\frac{dV}{dn}d\omega.$$

C'est sur cette hypothèse fondamentale, qui n'est autre chose que la loi de Ohm, que repose la théorie des courants constants; elle sera justifiée par ses conséquences.

214. Une première conséquence de cette loi, c'est que tout l'intérieur du conducteur est à l'état neutre. En effet, considérons le volume limité par un canal orthogonal infiniment petit, et par les éléments correspondants $d\omega_1$ et $d\omega_2$ de deux surfaces de niveau voisines, et raisonnons d'abord dans l'hypothèse d'un fluide unique; pendant le temps très-petit θ, il entre dans ce volume par la base $d\omega_1$ une quantité de fluide $-a\theta\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1$, et il en sort par la base opposée une quantité $-a\theta\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2$ (pour fixer les idées, nous supposons la dérivée $\frac{dV}{dn}$ négative, quand on marche de l'extrémité 1 vers l'extrémité 2). La quantité de fluide contenue dans ce volume a donc éprouvé pendant le temps θ un accroissement

$$-a\theta\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2\right];$$

le courant étant constant, la quantité de fluide contenue dans chaque élément de volume du conducteur doit rester la

même; on a ainsi

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2 = 0.$$

Mais, d'après le théorème du n° 176, le premier membre est égal à $4\pi q$, q étant la quantité d'électricité libre contenue dans le volume considéré; on en conclut que cette quantité q est nulle, et par conséquent qu'il n'y a pas d'électricité libre à l'intérieur du conducteur. Le fluide électrique en mouvement dans le conducteur a donc partout la densité normale qui constitue l'état neutre par rapport au conducteur donné.

215. Il semble résulter de là que la résistance opposée par le conducteur au mouvement du fluide est proportionnelle à la vitesse u du courant. En effet, nous pouvons représenter par $m\varphi(u)$ la résistance qui s'exerce sur une masse m de fluide; cette résistance étant à peu près égale et opposée à la force électromotrice $-m\frac{dV}{dn}$ qui sollicite la même masse, on a

$$\varphi(u) = -\frac{dV}{dn}.$$

D'autre part, si l'on désigne par ρ la densité du fluide neutre, la quantité qui traverse l'élément de surface $d\omega$ pendant l'unité de temps est $di = \rho u d\omega$. D'après la loi de Ohm, cette quantité est égale à $-ad\omega\frac{dV}{dn}$; on en déduit $-\frac{dV}{dn} = \frac{\rho}{a}u$, et, par suite, $\varphi(u) = \frac{\rho}{a}u$.

216. Raisonnons maintenant dans l'hypothèse des deux fluides. Pendant le temps θ, il entre dans le volume par la base $d\omega_1$ une quantité $-\frac{a\theta}{2}\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1$ de fluide positif, et il en sort par la base opposée une quantité $-\frac{a\theta}{2}\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2$, de sorte que la quantité de fluide positif contenue dans le volume

éprouve une augmentation

$$-\frac{a\theta}{2}\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2\right].$$

Pendant le même temps, il sort par la base $d\omega_1$ une quantité $-\frac{a\theta}{2}\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1$ de fluide négatif, et il en entre par la base opposée $d\omega_2$ une quantité $-\frac{a\theta}{2}\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2$; de sorte que la quantité de fluide négatif contenue dans le volume éprouve une diminution

$$-\frac{a\theta}{2}\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2\right];$$

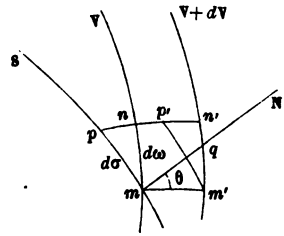
la somme de ces deux quantités est l'accroissement d'électricité libre. On retrouve la même expression que précédemment, et on arrive à la même conclusion : chaque élément de volume reste à l'état neutre, et par conséquent contient toujours des quantités égales des deux fluides.

Puisqu'il n'y a pas d'électricité libre à l'intérieur du conducteur, il en résulte que l'électricité libre nécessaire à la production du potentiel est située à la surface même du conducteur ou à l'extérieur. Dans les expériences ordinaires, lorsque les actions chimiques ou la chaleur donnent naissance à un courant électrique, il n'existe pas de masses électriques à l'extérieur; toute l'électricité libre est donc répandue en une couche infiniment mince à la surface du conducteur. Mais cette couche n'est pas en équilibre, puisque son potentiel n'est pas constant dans l'intérieur ni sur la surface : il semble donc qu'elle soit elle-même en mouvement à la surface du conducteur; mais sa masse est très-petite par rapport à celle du courant intérieur, et on peut la négliger.

217. L'équation (1) donne la quantité d'électricité qui traverse pendant l'unité de temps un élément d'une surface de niveau. Cherchons la quantité d'électricité di qui traverse un élément $mp = d\sigma$ d'une surface quelconque S (*fig.* 52). La quantité d'électricité qui traverse l'élément $d\sigma$ dans le temps infini-

ment petit dt occupe le cylindre $mpp'm'$, dont l'arête latérale mm' est normale à la surface de niveau V qui passe au

Fig. 52.



point m; par le point m' passe une surface de niveau $V + dV$; le cylindre oblique $mpp'm'$ est équivalent au cylindre droit $mnn'm'$ qui représente la quantité de fluide qui traverse l'élément $mn = d\omega$ de la surface de niveau V. On a donc

$$di = -a\frac{dV}{dn}d\omega.$$

Soient dn et ds les portions mm' et mq des normales aux surfaces V et S au point m, comprises entre les deux surfaces de niveau infiniment voisines V et $V + dV$, θ l'angle de ces deux normales, on a

$$dn = ds.\cos\theta, \quad d\omega = d\sigma.\cos\theta,$$

et, par suite,

$$(\mathrm{I}') \qquad di = -a\frac{dV}{ds}d\sigma.$$

C'est la formule générale de Ohm.

CONDUCTEURS LINÉAIRES.

218. On emploie ordinairement des conducteurs de forme allongée et de section très-petite; on pourra, dans ce cas, regarder la section normale ω du conducteur comme un élément d'une surface de niveau, et assimiler le fil à un canal dans lequel se meut l'électricité. En appelant i l'intensité du courant,

on a

$$i = -a\omega \frac{dV}{dn},$$

d'où

$$(a) \qquad \frac{dV}{dn} = -\frac{i}{a\omega};$$

cette équation fait connaître la loi suivant laquelle varie le potentiel le long du fil. Lorsque la section ω du fil est constante, on peut intégrer, et l'on a

$$V_1 - V_2 = \frac{i}{a\omega} l,$$

l étant la longueur du fil entre les points 1 et 2 dans le sens du courant; dans ce cas, le potentiel décroît en progression arithmétique. On en déduit

$$(\mathrm{II}) \qquad i = \frac{V_1 - V_2}{\left(\frac{l}{a\omega}\right)}.$$

Cette formule est la loi de Ohm pour les courants linéaires. La différence $V_1 - V_2$ des valeurs du potentiel aux deux extrémités du fil est ce que les physiciens appellent *la force électromotrice du courant entier*. Ils ont donné à la quantité constante $\frac{l}{a\omega}$ le nom de *résistance du conducteur*. Nous la représenterons par λ; de cette manière, l'équation (II) se met sous la forme

$$(\mathrm{II}') \qquad i = \frac{V_1 - V_2}{\lambda}.$$

La formule (II') a été vérifiée de plusieurs manières :

1° Quand la pile est formée de deux éléments au lieu d'un seul, le conducteur restant le même, l'intensité du courant devient double. Il faut, bien entendu, pour faire cette expérience, se mettre à l'abri des causes d'erreur dues à l'introduction d'un nouvel élément dans le circuit.

2° La force électromotrice $V_1 - V_2$ restant la même, si l'on

change soit la section, soit la longueur du conducteur, on reconnaît que l'intensité du courant varie proportionnellement à la section, et en raison inverse de la longueur.

219. Lorsque la section ω du fil n'est pas constante, l'équation (a) donne

$$-dV = i\frac{dn}{a\omega}.$$

On peut poser $\frac{dn}{a\omega} = d\lambda$, $d\lambda$ étant la résistance de l'élément dn du fil; la résistance λ du conducteur entier sera représentée par l'intégrale

$$\lambda = \int_1^2 \frac{dn}{a\omega};$$

de cette manière, l'équation précédente devient

$$-dV = i\,d\lambda,$$

d'où

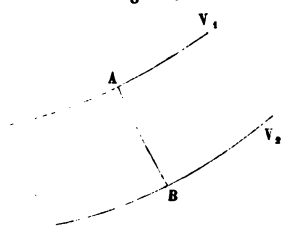
$$V_1 - V_2 = i\lambda, \quad i = \frac{V_1 - V_2}{\lambda}.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (II').

TRAVAIL DES FORCES ÉLECTROMOTRICES. — LOI DE JOULE.

220. Évaluons d'abord le travail de la force $-dq\frac{dV}{dn}$, qui agit sur une masse électrique infiniment petite dq, décrivant

Fig 53.



dans le conducteur une courbe AB (*fig.* 53) orthogonale aux

surfaces de niveau. Pendant le temps infiniment petit dt, la molécule électrique parcourt un élément dn normal à une surface de niveau; le travail élémentaire de la force est donc

$$-dq\frac{dV}{dn}dn = -dq\,dV,$$

et le travail total du point A au point B est

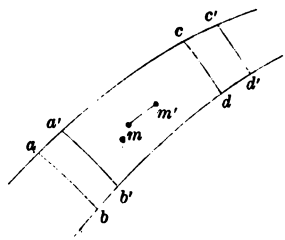
$$dq(V_1 - V_2),$$

V_1 et V_2 étant les valeurs du potentiel en A et B.

On voit que ce travail est le même que celui d'un poids dq descendant du niveau V_1 au niveau V_2.

221. Considérons maintenant un courant dans un conducteur de forme allongée, entouré d'un milieu isolant. Soient ab et cd les sections du conducteur par deux surfaces de niveau V_1 et V_2 (*fig.* 54); cherchons le travail effectué pendant un temps infiniment petit dt par les forces électromotrices qui agissent sur la masse électrique comprise entre ces deux sur-

Fig. 54.



faces. Au bout du temps dt, cette masse sera venue en $a'b'c'd'$. Une molécule quelconque dq a parcouru un petit arc mm', et le travail élémentaire de la force qui agit sur cette molécule est $dq(V - V')$, V et V' étant les valeurs du potentiel aux points m et m'. Pour la masse entière, le travail est

$$d\mathfrak{T} = \int (V - V')dq = \int V\,dq - \int V'\,dq,$$

le signe somme s'étendant à toute la masse considérée. Dans

cette expression, V est la valeur du potentiel au point où se trouve une molécule électrique dq au temps t, V′ la valeur du potentiel au point où se trouve la même molécule au temps $t + dt$. La première somme s'étend donc à l'espace $abcd$, la seconde à l'espace $a'b'c'd'$. Puisque le potentiel est indépendant du temps, il est clair que les termes qui se rapportent à la partie commune $a'b'cd$ sont égaux; on peut donc borner la première somme au volume infiniment petit $aba'b'$, la seconde au volume infiniment petit $cdc'd'$. Le potentiel ayant des valeurs sensiblement constantes V_1 et V_2 dans ces volumes infiniment petits, les deux sommes ont pour expressions

$$V_1 \int dq, \quad V_2 \int dq.$$

Mais les masses comprises dans les deux volumes sont égales; c'est la quantité idt d'électricité qui traverse une section dans le temps dt. On a donc

$$d\mathfrak{T} = (V_1 - V_2) i dt.$$

Tel est le travail pendant le temps dt des forces électromotrices qui agissent sur les masses électriques comprises entre les deux surfaces de niveau V_1 et V_2; le travail pendant l'unité de temps est

$$\text{(III)} \qquad \mathfrak{T} = (V_1 - V_2) i.$$

On voit que ce travail est le même que celui d'un poids i descendant du niveau V_1 au niveau V_2.

222. D'après le théorème général des forces vives, le travail $d\mathfrak{T}$ des forces électromotrices pendant le temps dt est égal à la variation de force vive de la masse électrique considérée $abcd$, plus le travail extérieur accompli. Or ce travail extérieur consiste en une certaine quantité d'énergie calorifique communiquée au conducteur, plus le travail nécessaire pour faire varier l'énergie potentielle du conducteur, si celui-ci éprouve quelque changement d'état ou une transformation chimique, plus enfin le travail mécanique extérieur proprement dit, si

es pièces du conducteur sont mobiles et accomplissent un ravail extérieur. Nous supposerons, pour le moment, que le onducteur n'éprouve aucune variation d'énergie potentielle t n'accomplit aucun travail extérieur. D'un autre côté, comme ous l'avons déjà remarqué (n° 210), la force vive de la masse lectrique paraît être très-petite et négligeable. On dira donc, ans ce cas, que le travail des forces électromotrices est égal à énergie calorifique développée dans le conducteur.

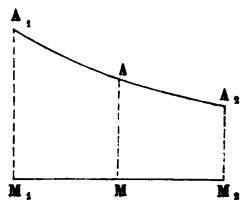
Pour un conducteur linéaire, si l'on remplace $V_1 - V_2$ par sa valeur tirée de l'équation (II'), on a

$$\text{(IV)} \qquad \mathfrak{E} = \lambda i^2.$$

La quantité de chaleur développée dans le conducteur est proportionnelle à la résistance du conducteur et au carré de l'intensité du courant. C'est la loi que M. Joule a trouvée par l'expérience.

223. Nous avons vu (n° 221) que le travail des forces électromotrices, pendant chaque unité de temps, est égal à celui d'un poids i descendant du niveau V_1 au niveau V_2; ceci nous

Fig. 55.



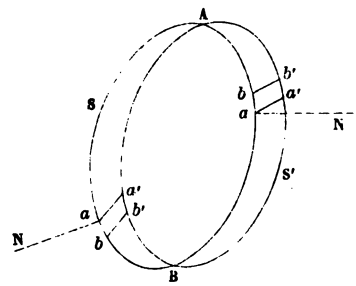
conduit à une manière très-simple de représenter le phénomène. Imaginons le conducteur linéaire rectifié suivant $M_1 M_2$ (*fig.* 55), et par chaque point M élevons une ordonnée MA égale à la valeur du potentiel en ce point; nous obtiendrons une courbe $A_1 A A_2$ sur laquelle nous pourrons concevoir que s'accomplit le mouvement du poids i. Lorsque la section ω du conducteur est constante, la variation $V_1 - V_2$ du potentiel étant proportionnelle à la longueur $M_1 M$ (n° 218), le courant est figuré par le mouvement du poids sur une droite $A_1 A_2$.

224. Pour compléter cette étude, considérons le mouvement de l'électricité dans un conducteur quelconque; la masse électrique enveloppée par une surface fermée S à l'intérieur du conducteur se déplace et occupe, après le temps dt, une position infiniment voisine S′ (*fig.* 56). Le travail des forces électromotrices qui agissent sur cette masse est

$$d\mathfrak{T} = \int (V - V')\,dq = \int V\,dq - \int V'\,dq,$$

la première somme s'étendant au volume S, la seconde au volume S′; comme on peut supprimer la partie commune, il suffit d'évaluer les termes relatifs aux parties restantes ASB, AS′B. Prenons sur la surface un élément $ab = d\sigma$; la quan-

Fig. 56.



tité $aba'b'$ d'électricité qui traverse cet élément pendant le temps dt est, d'après l'équation (I′),

$$dq = -a\frac{dV}{ds}\,d\sigma\,dt,$$

dans laquelle ds désigne un élément de la normale aN à la surface S. Puisque le mouvement a lieu dans le sens où V diminue, la valeur de dV, qui correspond au déplacement aa', est une quantité négative. Convenons de mener la normale aN en chaque point vers l'extérieur; pour un élément de la partie AS′B, ds étant positive, le rapport $\frac{dV}{ds}$ est négatif; il faudra prendre $dq = -a\frac{dV}{ds}\,d\sigma\,dt$, et la seconde somme

sera, abstraction faite de la partie commune,

$$\int V' dq = -a dt \int V \frac{dV}{ds} d\sigma.$$

Pour un élément de la partie ASB, ds étant au contraire négative, le rapport $\frac{dV}{ds}$ est positif; il faudra prendre $dq = a \frac{dV}{ds} d\sigma dt$, et la première somme deviendra

$$\int V dq = a dt \int V \frac{dV}{ds} d\sigma.$$

On a ainsi

$$d\mathfrak{T} = a dt \int V \frac{dV}{ds} d\sigma,$$

le signe somme s'étendant à toute la surface S. Le travail pendant l'unité de temps est donc

$$\text{(V)} \qquad \mathfrak{T} = a \int V \frac{dV}{ds} d\sigma.$$

Nous avons basé cette théorie sur la loi de Ohm, et nous en avons déduit la loi de Joule. Nous aurions pu, au contraire, partir de la loi de Joule et en déduire la loi de Ohm. En effet, nous remarquons d'abord que l'établissement de la formule (III) n'exige aucune hypothèse autre que celle du mouvement de l'électricité suivant une ligne orthogonale aux surfaces de niveau; si on la combine avec la loi de Joule (IV), on obtient la loi de Ohm (II′) ou (II).

CHAPITRE VI.

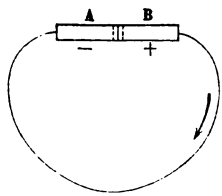
COURANTS THERMO-ÉLECTRIQUES.

Principe de Volta. — Expérience de Seebeck. — Expérience de Peltier.

PRINCIPE DE VOLTA.

225. Volta a admis que le simple contact de deux métaux suffit pour leur donner des états électriques différents; l'un d'eux se charge d'électricité positive, l'autre d'électricité négative. L'hypothèse de Volta est adoptée aujourd'hui par un grand nombre de physiciens, et elle paraît confirmée par plusieurs expériences. On peut énoncer cette hypothèse en disant que le potentiel a sur chacun des métaux A et B en contact

Fig. 57.

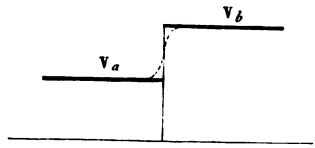


une valeur constante, puisque l'équilibre existe dans chacun d'eux, mais que ces deux valeurs V_a et V_b sont inégales. Supposons que l'on ait, par exemple, $V_b > V_a$; si l'on pouvait réunir ces deux métaux par un fil conducteur sans introduire de nouveau contact dans le circuit (*fig.* 57), il se produirait un courant; mais l'expérience n'est pas possible dans ces conditions : les autres contacts que l'on introduira nécessairement dans le circuit détruiront l'effet du premier.

Nous figurerons cet état des lames en contact par deux droites horizontales V_a et V_b placées à des hauteurs différentes (*fig.* 58); le potentiel varie très-rapidement dans le voisi-

nage du contact. Il est probable que ce changement dans la valeur du potentiel n'a pas lieu brusquement, mais qu'il se produit

Fig. 58.



d'une manière continue entre deux surfaces très-voisines de la surface de contact, de même que, dans une bouteille de Leyde à verre mince, le potentiel est constant sur chacune des deux armatures, et passe d'une valeur à l'autre d'une manière continue entre deux points éloignés seulement de l'épaisseur du verre.

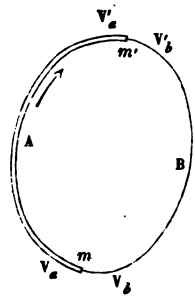
EXPÉRIENCE DE SEEBECK.

226. La différence des niveaux électriques, qui existe au contact de deux métaux, dépend essentiellement de la température; elle est ordinairement d'autant plus grande que la température est plus élevée. Si l'on forme un circuit avec deux métaux réunis par deux soudures, ce circuit ne peut être traversé par un courant que si la différence des niveaux électriques n'est pas la même aux deux points de contact. Le moyen le plus simple de rendre ces différences de niveau inégales est de porter l'une des soudures à une température plus élevée que l'autre; c'est l'expérience de Seebeck.

Soient donc deux métaux A et B soudés aux deux points m et m' (*fig.* 59), la première sou dure étant à la température t, la seconde à une température plus élevée t'. Appelons V_a et V'_a les valeurs du potentiel sur le métal A aux points m et m', V_b et V'_b les valeurs sur le métal B aux mêmes points. Supposons les deux métaux de telle nature qu'au point de contact le potentiel ait sur le second une valeur plus grande que sur le premier, c'est-à-dire que les deux différences $V'_b - V'_a$, $V_b - V_a$ soient positives, et admettons que le courant parcoure le métal A

en allant de m vers m'; désignons par λ_a et λ_b les résistances conducteurs A et B, et par λ la résistance totale $\lambda_a + \lambda_b$

Fig. 59.



circuit. L'intensité du courant a pour expression dans le co ducteur A

$$i = \frac{V_a - V'_a}{\lambda_a},$$

et dans le conducteur B

$$i = \frac{V'_b - V_b}{\lambda_b}.$$

Ces deux quantités étant égales, on en déduit

$$i = \frac{V_a - V'_a}{\lambda_a} = \frac{V'_b - V_b}{\lambda_b} = \frac{(V'_b - V'_a) - (V_b - V_a)}{\lambda}.$$

Si l'on pose

$$H = V_b - V_a, \quad H' = V'_b - V'_a,$$

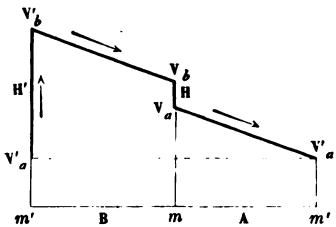
on obtient la formule

$$(1) \qquad i = \frac{H' - H}{\lambda}.$$

Lorsque les deux soudures sont à la même température a $H = H'$, et, par suite, $i = 0$; le courant est nul. Mais, soudure m' est à une température plus élevée que m, la di rence H' est plus grande que H, et le courant a lieu dan sens indiqué par la flèche.

227. Le phénomène sera figuré de la manière suivante : imaginons le circuit rectifié suivant $m'mm'$ (*fig.* 60); au point de contact m', le poids d'électricité i a été élevé du niveau V'_a au niveau V'_b; il descend ensuite, comme sur un plan incliné, jusqu'au niveau V_b; là, au point de contact m, il tombe du ni-

Fig. 60.



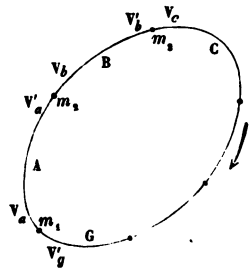
veau V_b au niveau V_a, et revient, par un second plan incliné, au niveau primitif V'_a; puis recommence indéfiniment le même mouvement.

Nous avons vu (n° 221) que le travail des forces électromotrices entre deux surfaces de niveau, pendant l'unité de temps, est égal au produit de l'intensité i du courant par la différence des valeurs du potentiel sur ces deux surfaces. Ce théorème est vrai dans tous les cas, et par conséquent pour deux surfaces de niveau comprenant une surface de contact et très-rapprochées l'une de l'autre. D'après cela, dans le voisinage du contact m', le travail des forces électromotrices est négatif et égal à $i(V'_a - V'_b) = -iH'$. Il faudra placer là un corps extérieur K_2 à la température t', qui fournisse, pendant chaque unité de temps, une quantité de chaleur équivalente $Q_2 = AiH'$. Au contraire, dans le voisinage du contact m, les forces électromotrices produisent un travail positif et égal à $i(V_b - V_a) = iH$; elles développent donc en cet endroit une quantité de chaleur $Q_1 = AiH$, qui sera absorbée par un corps extérieur K_1 à la température t, et placé en cet endroit. Il se dégage en outre le long des conducteurs A et B des quantités de chaleur égales à $Ai(V_a - V'_a)$ et $Ai(V'_b - V_b)$. Ainsi il entre dans le circuit une quantité de chaleur Q_2 par la soudure m', et il en sort une

d'où, en combinant par addition ces rapports égaux,

$$i = \frac{(V_b - V'_a) + (V_c - V'_b) + \ldots + (V_a - V'_g)}{\lambda}.$$

Fig. 61.



Si l'on pose

$$H_{ab} = V_b - V'_a, \quad H_{bc} = V_c - V'_b, \ldots,$$

cette équation devient

$$i = \frac{H_{ab} + H_{bc} + \ldots + H_{ga}}{\lambda},$$

ou, plus simplement,

$$(2) \qquad i = \frac{\Sigma H}{\lambda}.$$

Les différences H de niveau électrique aux soudures sont positives ou négatives; lorsque leur somme algébrique est positive, le courant marche dans le sens indiqué par la flèche; lorsque leur somme est négative, le courant marche en sens contraire.

La somme algébrique des quantités de chaleur absorbées ou dégagées aux surfaces du contact des métaux est

$$Q = A i \Sigma H = A \lambda i^2;$$

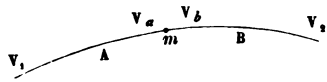
elle est égale à la quantité qui se dégage le long du circuit (n° 222).

L'expérience apprend que, lorsque toutes les soudures sont à la même température, il ne se produit pas de courant; on a donc, dans ce cas, $\Sigma H = 0$, et, par suite, $Q = 0$.

EXPÉRIENCE DE PELTIER.

230. Considérons un arc conducteur formé de deux métaux A et B en contact au point m (*fig.* 62); on fait traverser ce con-

Fig. 62.



ducteur par un courant produit par une cause quelconque. Soient V_1 et V_2 les valeurs du potentiel aux deux extrémités de l'arc, V_a et V_b les valeurs sur les deux métaux au contact, on aura

$$i = \frac{V_1 - V_a}{\lambda_a} = \frac{V_b - V_2}{\lambda_b},$$

et, par suite,

$$(3) \qquad i = \frac{(V_1 - V_2) + (V_b - V_a)}{\lambda}.$$

Lorsque la différence de niveau $V_b - V_a$ est négative, comme dans la *fig.* 63, il y a au contact chute électrique, par suite

Fig. 63.

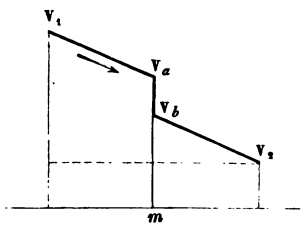
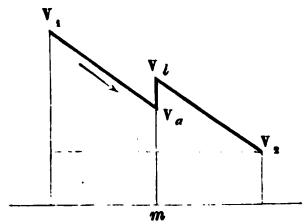


Fig. 64.



production d'un travail positif, ou d'une quantité de chaleur $Ai(V_a - V_b)$.

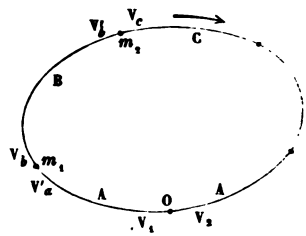
Si un réfrigérant extérieur n'enlève pas cette chaleur à chaque instant, la soudure s'échauffe; c'est un phénomène qui a été observé depuis longtemps.

Au contraire, lorsque la différence $V_b - V_a$ est positive,

comme dans la *fig.* 64, l'élévation du poids électrique i du niveau V_a au niveau V_b exige la consommation d'une quantité de chaleur $Ai(V_b - V_a)$. Si la soudure n'est pas en communication avec une source qui la lui fournisse constamment, la chaleur sera empruntée au conducteur lui-même, et il se produira au point de contact un abaissement de température. Tel est le phénomène observé par Peltier, et qui était resté longtemps sans explication.

231. Considérons, plus généralement, un arc conducteur formé de plusieurs métaux A, B, C, . . . , G, qui se touchent en m_1, m_2, . . . (*fig.* 65); on fait passer à travers ce conducteur un cou-

Fig. 65.



rant électrique produit par une cause quelconque. Appelons V_1 et V_2 les valeurs du potentiel aux deux extrémités de l'arc, V'_a la valeur du potentiel sur le métal A au contact m_1, V_b et V'_b les valeurs du potentiel sur le métal B en m_1 et m_2, et ainsi de suite; nous aurons

$$i = \frac{V_1 - V'_a}{\lambda_a} = \frac{V_b - V'_b}{\lambda_b} = \ldots = \frac{V_g - V_2}{\lambda_g},$$

et, par suite,

$$(4) \qquad i = \frac{(V_1 - V_2) + H_{ab} + H_{bc} + \ldots H_{fg}}{\lambda}.$$

Pour tenir compte de tous les contacts qui existent dans un circuit fermé, il faut supposer que le dernier métal G est le même que le premier A. En un point O est placée une source d'électricité, par exemple une pile, qui produit en ce point

une différence $V_1 - V_2$ dans le potentiel. La formule (4) devient ainsi

$$i = \frac{(V_1 - V_2) + H_{ab} + H_{bc} + \ldots + H_{fa}}{\lambda},$$

ou, plus simplement,

$$(5) \qquad i = \frac{(V_1 - V_2) + \Sigma H}{\lambda}.$$

Ceci suppose que l'on peut négliger la résistance de la pile.

Nous avons dit (n° 229) que, lorsque, dans un circuit fermé, tous les contacts sont à la même température, on a $\Sigma H = 0$; la somme algébrique des quantités de chaleur absorbées par les soudures est nulle, et l'intensité du courant est la même que s'il n'y avait pas de contact.

CHAPITRE VII.

PHÉNOMÈNES ÉLECTROCHIMIQUES.

Considérations sur la mesure des actions chimiques. — Électrolytes et électrolyseurs. — Équivalents électrochimiques. — Théorie de la pile.

MESURE DES ACTIONS CHIMIQUES.

232. Les phénomènes chimiques sont toujours accompagnés de dégagement ou d'absorption de chaleur, et le plus souvent de courants électriques; ces différents effets sont dus au travail des forces moléculaires, ou des affinités chimiques.

Considérons un mélange de plusieurs éléments, et supposons d'abord qu'il ne soit soumis à aucune action extérieure. Sous l'influence de leurs actions mutuelles, ces éléments peuvent se grouper de différentes manières et prendre plusieurs états d'équilibre stable, auxquels correspondent différentes valeurs minima de l'énergie potentielle. Le jeu naturel des forces intérieures est de produire un travail positif; par conséquent, quand le système passe d'un état d'équilibre à un autre, il y a toujours diminution de l'énergie potentielle, et, si on laisse le système revenir à la même température, il y a dégagement d'une quantité de chaleur équivalente au travail des forces intérieures, ou à la diminution de l'énergie potentielle. Au contraire, pour faire revenir le système du second état au premier, il faut lui fournir une quantité de chaleur équivalente à l'augmentation d'énergie potentielle. Il résulte de là que l'on peut adopter comme mesure de l'action chimique la quantité d'énergie calorifique dégagée ou absorbée pendant la transformation.

Parmi les différents états d'équilibre, il en est un particulièrement remarquable : c'est celui pour lequel l'énergie potentielle est nulle; c'est l'état le plus stable; si le système y

arrivait, il ne pourrait plus éprouver aucune transformation par le jeu seul des forces intérieures; pour le tirer de cet état, il faudrait lui communiquer une certaine quantité d'énergie calorifique.

Les phénomènes sont plus complexes lorsque le système est soumis à des forces extérieures, par exemple à une pression uniforme, ce qui est le cas ordinaire. Les différents états d'équilibre que peut prendre le système dépendent de cette pression. Si, après une transformation, c'est-à-dire après le passage d'un état d'équilibre à un autre, on laisse le système revenir à la même température, la variation d'énergie potentielle est égale à la quantité d'énergie calorifique absorbée ou dégagée par le système, plus le travail qui correspond à la pression extérieure.

Les combinaisons chimiques sont accompagnées ordinairement d'un dégagement de chaleur et d'une diminution de volume. Il y a alors une diminution d'énergie potentielle égale à l'excès de l'énergie calorifique dégagée sur le travail de la pression.

Les décompositions s'effectuent ordinairement à l'aide d'une absorption de chaleur, et il se produit en même temps une augmentation de volume. Il y a alors une augmentation d'énergie potentielle égale à l'excès de l'énergie calorifique absorbée sur le travail extérieur accompli par le corps pendant sa dilatation. Toutefois il y a des combinaisons qui sont accompagnées d'une absorption de chaleur, et des décompositions qui s'effectuent avec dégagement de chaleur.

ÉLECTROLYTES ET ÉLECTROLYSEURS. — ÉQUIVALENTS ÉLECTROCHIMIQUES.

233. La considération des quantités de chaleur dégagées ou absorbées dans les opérations chimiques, et dans les courants électriques, va nous permettre d'établir un lien, et comme une commune mesure, entre ces deux catégories de phénomènes. Supposons qu'un liquide, renfermant en dissolution un corps composé, soit traversé par un courant électrique constant;

sous l'influence du courant, le composé est détruit, les éléments sont transportés en sens opposés, et cette décomposition absorbe une certaine quantité de chaleur, qui est fournie par le courant, c'est-à-dire qui est produite par le travail des forces électriques. Si donc on appelle Q la quantité de chaleur absorbée par l'opération chimique pendant l'unité de temps, et H l'abaissement du potentiel ou du niveau électrique, à l'endroit où elle s'accomplit, le travail des forces électromotrices étant Hi, on aura l'équation

$$EQ = Hi, \tag{1}$$

E désignant l'équivalent mécanique de la chaleur.

Inversement, si deux corps susceptibles de se combiner sont placés dans un liquide traversé par un courant, la combinaison s'opère, et elle dégage une certaine quantité de chaleur qui produit une élévation du niveau électrique, à l'endroit où se fait la combinaison. La quantité de chaleur Q dégagée par l'opération chimique pendant l'unité de temps, et l'élévation H du potentiel, sont encore liées par la relation $EQ = Hi$. Cette équation peut être appliquée aux deux cas de la question, en regardant l'action chimique comme positive ou négative, suivant qu'elle dégage ou absorbe de la chaleur, et la variation du potentiel dans le sens du courant comme positive ou négative, suivant qu'il y a élévation ou abaissement.

234. Première loi expérimentale. — *Pour des corps donnés, les poids décomposés ou combinés dans le même temps sont proportionnels à l'intensité du courant.* La quantité de chaleur absorbée ou dégagée est évidemment proportionnelle au poids décomposé ou combiné. D'après la loi précédente, elle est donc proportionnelle à l'intensité i du courant; mais cette quantité est égale à AHi pendant l'unité de temps : on en conclut que la différence de niveau H est une constante pour chaque système de corps mis en présence. Ainsi l'électrolyte ou l'électrolyseur se comportent comme le contact de deux métaux différents; ils produisent, à une température et à une pression données, une variation déterminée H dans le poten-

tiel. Il est probable que cette différence H varie avec la température, comme cela a lieu pour le contact de deux métaux, et qu'elle varie aussi avec la pression extérieure.

235. Deuxième loi expérimentale. — En plaçant sur le trajet d'un même courant, à la suite l'un de l'autre, des appareils renfermant des combinaisons différentes, Faraday a reconnu que *les poids décomposés sont proportionnels à leurs équivalents chimiques*. En ce qui concerne les sels, si un équivalent d'acide est isolé dans un électrolyte, un équivalent d'acide sera aussi isolé dans le second; il convient donc, à ce point de vue, de représenter les sels par des formules renfermant, non pas un équivalent de la base ou de l'oxyde, mais un équivalent de l'acide ou du métalloïde qui joue le rôle d'acide. La loi de Faraday s'accorde, en général, avec les équivalents chimiques ordinaires; mais, pour certains corps, il est nécessaire de doubler ou de diviser par 2 l'équivalent chimique.

La même loi se vérifie dans les électrolyseurs, c'est-à-dire pour les corps qui se combinent sur le passage d'un courant électrique.

En généralisant cette loi de Faraday, on peut définir les *équivalents électrochimiques* de tous les corps : ce sont les poids de ces corps qui se combinent ou se dissocient, pendant l'unité de temps, sur le trajet d'un courant dont l'intensité est égale à l'unité.

THÉORIE DE LA PILE.

236. Considérons un élément de pile alimenté par la dissolution du zinc dans un liquide quelconque. Appelons q la quantité de chaleur produite par la dissolution d'un kilogramme de zinc dans le liquide, et a l'équivalent électrochimique du zinc, c'est-à-dire le poids du zinc qui se dissout pendant l'unité de temps sur le trajet d'un courant dont l'intensité est égale à l'unité. Lorsque l'intensité du courant est i, le poids de zinc dissous est ai, et l'action chimique correspondante $Eqai$. Si la pile est formée de n éléments placés les

uns à la suite des autres, et par conséquent traversés p
même courant, l'action chimique est $n\mathrm{E}aqi$.

Supposons les deux pôles de la pile réunis par un fil
ducteur homogène et à la même température dans tou
longueur; appelons λ' la résistance du fil et λ'' celle de ch
des éléments de la pile; la résistance totale du circuit
$\lambda = \lambda' + n\lambda''$. En égalant l'action chimique de la pile à la q
tité d'énergie calorifique qui se dégage dans le circuit fe
on a l'équation

$$(2) \qquad na\mathrm{E}qi = \lambda i^2,$$

d'où l'on déduit

$$i = \frac{na\mathrm{E}q}{\lambda},$$

ou

$$(3) \qquad i = \frac{na\mathrm{E}q}{\lambda' + n\lambda''}.$$

Remarquons que l'intensité du courant n'augmente p
delà de toute limite, quand on augmente indéfiniment le
bre des éléments de la pile; elle tend vers une limite fin

$$(4) \qquad i = \frac{a\mathrm{E}q}{\lambda''}.$$

Lorsque le nombre des éléments n'est pas trop grand e
la résistance $n\lambda''$ de la pile est très-petite par rapport à
du fil, on a approximativement

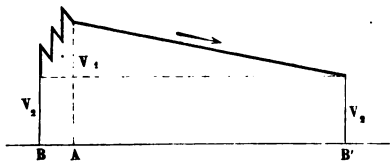
$$(5) \qquad i = \frac{na\mathrm{E}q}{\lambda'}:$$

l'intensité est à peu près proportionnelle au nombre de
ments.

237. Nous pouvons suivre aisément les variations du p
tiel dans cet appareil. Supposons, pour simplifier, que l'a
chimique de chaque élément de la pile se manifeste su
de ses faces, par exemple sur la première face, dans le se

courant (*fig.* 66); elle produira en ce point une élévation de niveau h qui sera donnée par l'équation $Eqai = hi$, d'où $h = aEq$;

Fig. 66.



mais, en traversant l'épaisseur du liquide qui remplit le vase, le courant éprouve ensuite une perte de niveau égale à $\lambda'' i$; de sorte que l'élévation provenant du premier élément sera égale seulement à la différence $aEq - \lambda'' i$. L'élévation provenant de la pile entière sera $naEq - n\lambda'' i$. Si donc on désigne par V_1 la valeur du potentiel au pôle positif de la pile, et par V_2 sa valeur au pôle négatif, on aura

$$V_1 - V_2 = naEq - n\lambda'' i.$$

Le potentiel diminue ensuite le long du fil, depuis le pôle positif jusqu'au pôle négatif. L'élévation $naEq$ produite par les actions chimiques est ce que les physiciens appellent *la force électromotrice de la pile*. En égalant cette quantité à la perte de niveau due à la résistance de tout le circuit, on a

$$naEq = \lambda i = (\lambda' + n\lambda'')i,$$

et l'on retrouve ainsi l'équation (3).

238. Supposons maintenant qu'on place un électrolyte sur le trajet du conducteur. Soit a' l'équivalent électrochimique du composé dissous et q' la quantité de chaleur nécessaire pour décomposer 1 kilogramme de ce corps; le poids décomposé pendant l'unité de temps est $a' i$, et la chaleur absorbée $a'q' i$. L'action chimique de la pile étant égale ici à l'énergie calorifique qui se dégage dans le circuit fermé, plus celle qui a servi à décomposer l'électrolyte, on a l'équation

$$naEqi = \lambda i^2 + a'Eq' i,$$

où λ désigne la résistance de tout le circuit, y compris l'él trolyte. On en déduit

$$(6) \qquad i = \frac{E(naq - a'q')}{\lambda}.$$

Nous remarquons d'abord que la présence de l'électr diminue l'intensité du courant; elle produit à cet endroi abaissement du niveau électrique. Nous voyons ensuite pour que le courant existe, il faut que la condition $naq >$ soit remplie, c'est-à-dire que l'action chimique de la pil plus grande que celle de l'électrolyte : c'est ce que l'e rience a vérifié. En augmentant le nombre des éléments pile, on peut toujours effectuer la décomposition.

239. Si l'on place dans le circuit plusieurs électrol qu'on appelle a', a'',... leurs équivalents électrochimiqu q', q'',... les quantités de chaleur nécessaires pour la dé position de 1 kilogramme de ces différents corps, on au même

$$naEqi = \lambda i^2 + a'Eq'i + a''Eq''i + \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$i = \frac{E[naq - (a'q' + a''q'' + \ldots)]}{\lambda}.$$

La résistance totale λ du circuit comprend la résistance pile, celle du fil conducteur, plus les résistances λ_1, λ_2,.. différents électrolytes,

$$\lambda = \lambda' + n\lambda'' + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots.$$

Pour que le courant existe, il faut encore que l'on ait

$$naq > a'q' + a''q'' + \ldots,$$

c'est-à-dire que l'action chimique de la pile soit plus gr que la somme des actions chimiques des électrolytes.

CHAPITRE VIII.

ÉLECTRODYNAMIQUE.

Préliminaires. — Ramener les deux fonctions inconnues à une seule. — Action d'un courant fermé sur un élément de courant. — Action d'un courant élémentaire sur un élément de courant. — Action d'un solénoïde sur un élément de courant. — Formule d'Ampère.

PRÉLIMINAIRES.

240. Rappelons d'abord les principes sur lesquels repose la théorie des phénomènes électrodynamiques. Ampère, qui a construit cette théorie, a admis que l'action de deux courants linéaires a lieu élément par élément, et que l'action mutuelle de deux éléments de courants est une force attractive ou répulsive, dirigée suivant la droite qui les joint, proportionnelle au produit des longueurs des éléments, au produit des intensités des courants, et fonction de leur distance. C'est là l'hypothèse fondamentale de la théorie. Il a fait usage ensuite des deux principes suivants, établis par l'expérience :

1° L'expérience apprend que, quand on change le sens de l'un des courants, la force change de signe, c'est-à-dire d'attractive devient répulsive, ou inversement;

2° L'expérience apprend aussi que l'action d'un courant fermé, composé d'une partie rectiligne et d'une partie sinueuse de même ordre de grandeur et qui s'en écarte très-peu, sur un courant extérieur, est très-petite par rapport à celle de la partie rectiligne. Il en résulte que l'on peut remplacer un élément de courant par ses projections sur trois axes quelconques.

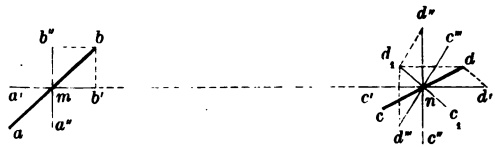
241. Nous aurons recours, en outre, à la loi théorique de la symétrie. Il est clair que l'action mutuelle de deux éléments de courant dépend de leur position relative. D'après cela, si

l'on considère les éléments symétriques de deux éléments donnés par rapport à un plan, la force qui s'exerce entre les deux premiers éléments et celle qui s'exerce entre les deux éléments symétriques sont symétriques l'une de l'autre.

Il en résulte que l'action mutuelle de deux éléments *ab*, *cd*, dont l'un *ab* est situé dans le plan perpendiculaire à l'autre, en son milieu, est nulle. En effet, prenons les éléments symétriques par rapport à ce plan; l'élément *ab* est à lui-même son symétrique, l'élément *cd* change de sens. La force devrait donc, en vertu du premier principe expérimental, changer de sens; mais la force, étant contenue dans le plan, et par conséquent symétrique à elle-même, ne change pas; on en conclut que cette force est nulle.

242. Considérons maintenant deux éléments quelconques *ab* *cd* (*fig.* 67); menons la droite *mn* qui joint leurs milieux. Nous pouvons remplacer l'élément *ab* par ses deux composantes $a'b'$

Fig. 67.



$a''b''$, suivant la droite *mn* et une perpendiculaire à cette droite dans le plan *bmn*. Nous décomposerons de même l'élément *cd* en deux composantes $c'd'$, c_1d_1, suivant la droite *mn* et une perpendiculaire à cette droite dans le plan *dnm*; dans le plan perpendiculaire à *mn* au point *n*, nous décomposerons ensuite l'élément c_1d_1 en deux composantes, l'une $c''d''$ parallèle à $a''b''$ l'autre $c'''d'''$ perpendiculaire à $c''d''$; de cette manière, l'élément *cd* sera remplacé par les trois éléments $c'd'$, $c''d''$, $c'''d'''$

Pour avoir l'action mutuelle des deux éléments *ab*, *cd*, suffit de trouver l'action de chacun des deux éléments $a'b'$ $a''b''$ sur chacun des trois éléments $c'd'$, $c''d''$, $c'''d'''$. Or, de six actions que l'on a à considérer, quatre sont nulles : 1° l'élément $a'b'$ étant situé dans le plan perpendiculaire à $c''d''$ et son milieu, l'action mutuelle des deux éléments $a'b'$, $c''d''$ et

nulle; 2° ce même élément $a'b'$ étant situé dans le plan perpendiculaire à $c'''d'''$ en son milieu, l'action mutuelle des éléments $a'b'$, $c'''d'''$ est nulle; 3° l'élément $c'd'$ étant situé dans le plan perpendiculaire à $a''b''$ en son milieu, l'action mutuelle des éléments $a''b''$, $c'd'$ est nulle; 4° l'élément $c'''d'''$ étant situé dans ce même plan, l'action mutuelle des éléments $a''b''$, $c'''d'''$ est nulle. Il reste donc à trouver l'action des deux éléments $a'b'$, $c'd'$ situés sur la même droite et celle des deux éléments parallèles $a''b''$, $c''d''$.

243. Désignant par ds et ds' les longueurs de deux éléments de courants, par i et i' les intensités, et par r la distance, nous représenterons par

$$ii'dsds'\mathrm{F}(r),$$
$$ii'dsds'f(r),$$

l'action mutuelle de ces deux éléments, placés sur la même droite, ou parallèles entre eux, les fonctions $\mathrm{F}(r)$ et $f(r)$ étant positives ou négatives, suivant que les forces sont attractives ou répulsives.

Les éléments ab et cd, dont les longueurs sont ds et ds' et les intensités i et i', ayant une position quelconque, appelons θ et θ' les angles que font, avec une même direction de la droite mn qui joint leurs milieux, les directions des courants sur ces deux éléments, φ l'angle dièdre des deux plans bmn, dnm, et r la distance mn; les quatre quantités r, θ, θ', φ définissent la position relative des deux éléments, et l'on a

$$a'b' = ds\cos\theta, \quad a''b'' = ds\sin\theta,$$
$$c'd' = ds'\cos\theta', \quad c''d'' = ds'\sin\theta'\cos\varphi, \quad c'''d''' = ds'\sin\theta'\sin\varphi.$$

L'action mutuelle des deux éléments $a'b'$, $c'd'$, situés sur la même droite mn, sera représentée par

$$ii'dsds'\mathrm{F}(r)\cos\theta\cos\theta',$$

celle des deux éléments parallèles $a''b''$, $c''d''$ par

$$ii'dsds'f(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi.$$

L'action mutuelle des deux éléments proposés ab, cd, se composant des deux actions précédentes, sera exprimée par la formule

$$(1) \quad F = ii'\,ds\,ds'\,[F(r)\cos\theta\cos\theta' + f(r)\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi].$$

On peut remplacer l'angle dièdre φ par l'angle ε que font entre elles les directions des courants sur les deux éléments proposés ab, cd; on a, en effet,

$$\cos\varepsilon = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi,$$

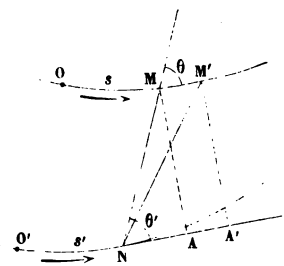
et la formule précédente devient

$$(2) \quad F = ii'\,ds\,ds'\left\{f(r)\cos\varepsilon + [F(r) - f(r)]\cos\theta\cos\theta'\right\}.$$

Pour évaluer les angles θ et θ', on prendra indifféremment la direction mn ou la direction opposée nm; car ceci revient à remplacer les deux angles θ et θ' par leurs suppléments, ce qui ne change pas la formule.

244. Avant d'aller plus loin, nous démontrerons quelques formules qui nous seront utiles. Considérons deux courants marchant dans des conducteurs linéaires de forme quelcon-

Fig. 68.



que (*fig.* 68). Soient M et N les milieux de deux éléments ds, ds' de ces courants; prenons deux points fixes O et O' sur ces conducteurs; la position du point M sur le premier conducteur sera déterminée par l'arc OM, que nous désignerons par s, celle du point N sur le second conducteur par l'arc O'N, que nous désignerons par s'. D'après cela, il est clair que la

distance r des deux points M et N est une fonction des deux variables indépendantes s et s', et l'on a

$$\cos\theta = \frac{\partial r}{\partial s}, \tag{3}$$

$$\cos\theta' = -\frac{\partial r}{\partial s'}. \tag{4}$$

D'autre part, la projection NA de la droite NM sur la tangente en N a pour valeur

$$\mathrm{NA} = r\cos\theta'.$$

Si l'on fait varier s, laissant s' constante, le point M vient en M', et la projection NA' de la droite NM' devient

$$\mathrm{NA}' = r\cos\theta' + \frac{\partial(r\cos\theta')}{\partial s}\,ds;$$

d'où

$$\mathrm{AA}' = \frac{\partial(r\cos\theta')}{\partial s}\,ds.$$

Mais, la longueur AA' étant la projection de l'élément $\mathrm{MM}' = ds$ sur la tangente en N, on a aussi

$$\mathrm{AA}' = ds\cos\varepsilon;$$

il en résulte

$$\cos\varepsilon = \frac{\partial(r\cos\theta')}{\partial s}. \tag{5}$$

Si l'on remplace $\cos\theta'$ par sa valeur (4), il vient

$$\cos\varepsilon = -\frac{\partial\left(r\dfrac{\partial r}{\partial s'}\right)}{\partial s} = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}. \tag{6}$$

RAMENER LES DEUX FONCTIONS INCONNUES A UNE SEULE.

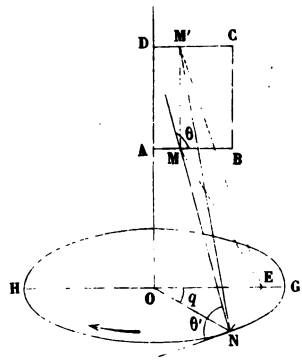
245. L'expression de la force, qui s'exerce entre deux éléments de courant, renferme deux fonctions inconnues $F(r)$ et $f(r)$. Pour déterminer ces deux fonctions, on se sert de deux cas d'équilibre observés expérimentalement. Afin de simpli-

fier le calcul, Ampère admettait que les deux fonctions sont de la forme $\frac{A}{r^n}$, $\frac{B}{r^n}$; mais nous traiterons la question d'une manière générale en suivant une méthode ingénieuse, due à Blanchet et enseignée par lui à l'École Normale (*).

Le premier cas d'équilibre employé est celui-ci : un courant rectangulaire ABCD (*fig.* 69), assujetti à tourner autour d'un de ses côtés AD, reste en équilibre, sous l'influence d'un courant circulaire qui a son centre O sur l'axe de rotation, et dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

Soient GH la trace du plan du rectangle sur le plan du cercle, M et N les milieux de deux éléments ds et ds' des deux courants; appelons a le rayon du cercle, q l'angle GON, u la

Fig. 69.



distance du point M à l'axe; menons du point N une perpendiculaire NE sur le diamètre GH, et joignons ME. La force F exercée par l'élément ds' sur l'élément ds est dirigée suivant MN, si elle est attractive; décomposons-la en deux, l'une suivant ME, l'autre perpendiculaire à ME, et par conséquent parallèle à EN; cette dernière composante a pour valeur

$$F \cos MNE = F \frac{NE}{r} = F \frac{a \sin q}{r},$$

(*) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. II.

et le moment de la force F par rapport à l'axe de rotation est

$$F\frac{a\sin q}{r}\times u.$$

La condition d'équilibre est que la somme des moments de toutes les forces qui agissent sur le courant rectangulaire soit nulle, c'est-à-dire

$$\sum\sum\frac{Fu\sin q}{r}=0.$$

246. En projetant sur la tangente au cercle en N le contour fermé NMAON, on a

$$r\cos\theta'+u\sin q=0,\quad\text{ou}\quad r\cos\theta'=-u\sin q;$$

puisque l'angle q est indépendant de s et la distance u indépendante de s', l'équation (5) devient

$$\cos\varepsilon=-\frac{\partial(u\sin q)}{\partial s}=-\frac{du}{ds}\sin q,$$

et l'expression (2) de la force F se met sous la forme

$$F=-ii'ds\,ds'\left[f(r)\frac{du}{ds}\sin q+\frac{F(r)-f(r)}{r}u\frac{\partial r}{\partial s}\sin q\right].$$

On a d'ailleurs $ds'=a\,dq$; l'équation d'équilibre est donc

$$(7)\quad\int\int\left[\frac{f(r)}{r}\frac{du}{ds}+\frac{F(r)-f(r)}{r^2}u\frac{\partial r}{\partial s}\right]u\sin^2q\,ds\,dq=0,$$

s et q étant prises pour variables indépendantes, et la double intégration s'étendant, d'une part, au périmètre du rectangle, d'autre part, à la circonférence entière. Il est évident que le côté DA du rectangle ne donne rien dans le résultat.

Considérons d'abord la première partie

$$\int\int\frac{f(r)}{r}\frac{du}{ds}u\sin^2q\,ds\,dq=\int\sin^2q\,dq\int\frac{f(r)}{r}u\frac{du}{ds}ds;$$

la longueur s est comptée sur le rectangle, à partir du point A, en marchant dans le sens du courant; le long de BC, on a

$\frac{du}{ds} = 0$; sur AB, on a $\frac{du}{ds} = 1$; sur CD, $\frac{du}{ds} = -1$; si donc appelle r et r' les distances NM, NM′ du point N à deux é ments ayant leurs milieux M et M′ sur une parallèle à AD, si l'on désigne par b la longueur du côté AB, on aura

$$\int \frac{f(r)}{r} u \frac{du}{ds} ds = \int_0^b \left[\frac{f(r)}{r} - \frac{f(r')}{r'}\right] u\,du,$$

et, par suite, la première partie devient

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 q\,dq \int_0^b \left[\frac{f(r)}{r} - \frac{f(r')}{r'}\right] u\,du.$$

247. Considérons maintenant la seconde partie

$$\int \sin^2 q\,dq \int \frac{F(r) - f(r)}{r^2} u^2 \frac{\partial r}{\partial s} ds,$$

que l'on écrira

$$\int \sin^2 q\,dq \int \psi'(r) u^2 \frac{\partial r}{\partial s} ds,$$

en posant, pour abréger,

$$(8) \qquad \frac{F(r) - f(r)}{r^2} = \psi'(r).$$

L'intégration par parties donne

$$\int u^2 \psi'(r) \frac{\partial r}{\partial s} ds = [u^2 \psi(r)]_1^2 - 2\int \psi(r) u \frac{du}{ds} ds;$$

les deux limites coïncidant, le premier terme est nul; le cond, d'après ce que nous avons dit, se met sous la forme

$$-2\int_0^b [\psi(r) - \psi(r')] u\,du;$$

la seconde partie devient ainsi

$$-2\int_0^{2\pi} \sin^2 q\,dq \int_0^b [\psi(r) - \psi(r')] u\,du,$$

et si l'on pose

$$(9) \qquad \frac{f(r)}{r} - 2\psi(r) = \chi(r),$$

l'équation d'équilibre se réduit à

$$(10) \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2 q\,dq \int_0^b [\chi(r) - \chi(r')]\,u\,du = 0.$$

On en conlut que la fonction $\chi(r)$ est une constante. En effet, on a $EM < EM'$, et, par suite, $r < r'$. Soit $b < a$; la plus petite valeur de r est BG, la plus grande valeur de r' est CH. Supposons que $\chi(r)$ ne soit pas constante et croisse, par exemple, quand r croît de r_1 à r_2; on construira le rectangle de manière que BG soit égale ou supérieure à r_1, CH égale ou inférieure à r_2; de cette manière, on aura toujours

$$r_1 \leqq r < r' \leqq r_2,$$

et, par suite,

$$\chi(r') > \chi(r);$$

tous les éléments de l'intégrale (10) auraient des valeurs positives, et leur somme ne pourrait être nulle.

La fonction $\chi(r)$ étant une constante, on a

$$\chi'(r) = 0,$$

et, par suite, en vertu des relations (8) et (9),

$$\frac{d\frac{f(r)}{r}}{dr} - 2\psi'(r) = 0,$$

ou

$$\frac{d\frac{f(r)}{r}}{dr} - 2\frac{F(r) - f(r)}{r^2} = 0.$$

On en déduit

$$(11) \qquad F(r) = f(r) + \frac{1}{2} r^2 \frac{d\frac{f(r)}{r}}{dr};$$

la première fonction inconnue se trouve ainsi déterminée à

l'aide de la seconde, et l'expression de la force élémentaire ne contient plus qu'une fonction inconnue

$$(12)\qquad F = ii'dsds'\left[f(r)\cos\varepsilon + \frac{1}{2}r^2\frac{d\frac{f(r)}{r}}{dr}\cos\theta\cos\theta'\right].$$

Pour simplifier un peu l'écriture, nous poserons

$$(13)\qquad \frac{f(r)}{r} = \varphi(r);$$

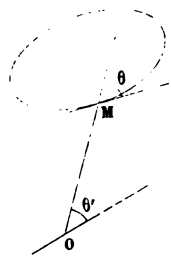
l'expression précédente devient

$$(14)\qquad F = ii'dsds'\left[r\varphi(r)\cos\varepsilon + \frac{1}{2}r^2\varphi'(r)\cos\theta\cos\theta'\right].$$

ACTION D'UN COURANT FERMÉ SUR UN ÉLÉMENT DE COURANT.

248. Par le point O (*fig.* 70), milieu de l'élément ds', menons trois axes rectangulaires; appelons x, y, z les coordonnées du

Fig. 70.



milieu M d'un élément ds du courant fermé. Toutes les forces qui agissent sur l'élément ds', étant appliquées en son milieu O, admettent une résultante appliquée en ce point; les projections X, Y, Z de cette résultante sur les axes des coordonnées sont de la forme

$$X = ii'ds'\int\left[r\varphi(r)\cos\varepsilon + \frac{1}{2}r^2\varphi'(r)\cos\theta\cos\theta'\right]\frac{x}{r}ds.$$

Il n'y a ici qu'une variable indépendante, l'arc s du conduc-

teur fermé, compté à partir d'un point fixe arbitraire. Les relations (3) et (5) peuvent s'écrire

$$\cos\theta = \frac{dr}{ds}, \quad \cos\varepsilon = \frac{d(r\cos\theta')}{ds}.$$

Si l'on remplace $\cos\theta$ par sa valeur, l'expression précédente devient

$$X = ii'\,ds'\int\left[x\varphi(r)\cos\varepsilon\,ds + \frac{1}{2}x\,r\cos\theta'\varphi'(r)dr\right].$$

Considérons la seconde partie de l'intégrale; en intégrant par parties, on a

$$\int x\,r\cos\theta'\varphi'(r)\,dr = [x\,r\cos\theta'\varphi(r)]_1^2 - \int\varphi(r)d(x\,r\cos\theta');$$

le courant étant fermé, le premier terme est nul; on a donc

$$\begin{aligned}\int x\,r\cos\theta'\varphi'(r)\,dr &= -\int\varphi(r)\,d(x\,r\cos\theta')\\ &= -\int\varphi(r)[x\,d(r\cos\theta') + r\cos\theta'\,dx]\\ &= -\int\varphi(r)(x\cos\varepsilon\,ds + r\cos\theta'\,dx).\end{aligned}$$

De cette manière, l'expression de X se réduit à

$$X = \frac{1}{2}ii'\,ds'\int\varphi(r)(x\cos\varepsilon\,ds - r\cos\theta'\,dx).$$

249. Si l'on appelle a, b, c les cosinus des angles que fait l'élément ds' avec les axes des coordonnées, on a, en projetant sur ds' la longueur r et l'élément ds,

$$\begin{aligned}r\cos\theta' &= ax + by + cz,\\ ds\cos\varepsilon &= a\,dx + b\,dy + c\,dz;\end{aligned}$$

d'où

$$x\cos\varepsilon\,ds - r\cos\theta'\,dx = b(x\,dy - y\,dx) - c(z\,dx - x\,dz),$$

et, par suite,

$$X = b\frac{1}{2}ii'ds'\int\varphi(r)(xdy - ydx)$$
$$- c\frac{1}{2}ii'ds'\int\varphi(r)(zdx - xdz).$$

On aurait des expressions analogues pour Y et Z. (que ces quantités dépendent des trois intégrales

$$(15)\quad \begin{cases} A = \int\varphi(r)(ydz - zdy), \\ B = \int\varphi(r)(zdx - xdz), \\ C = \int\varphi(r)(xdy - ydx), \end{cases}$$

que nous désignons par A, B, C, et l'on a

$$(16)\quad \begin{cases} X = \frac{1}{2}ii'ds'(bC - cB), \\ Y = \frac{1}{2}ii'ds'(cA - aC), \\ Z = \frac{1}{2}ii'ds(aB - bA). \end{cases}$$

Les trois intégrales (15) dépendent de la forme du fermé, et de sa position par rapport au milieu O de l'é ds'; elles sont indépendantes de la direction de cet élé

250. Des formules (16) on déduit les relations

$$aX + bY + cZ = 0,$$
$$AX + BY + CZ = 0.$$

La première indique que la résultante est perpendic l'élément ds', la seconde qu'elle est perpendiculaire droite OG faisant avec les axes des angles dont les sont proportionnels à A, B, C; cette seconde droite e pendante de la direction de l'élément ds'. Le plan m

la droite OG et l'élément ds' est le *plan directeur* d'Ampère; la résultante est perpendiculaire au plan directeur.

On a d'ailleurs

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\frac{1}{2}\,i\,i'\,ds'\sqrt{A^2+B^2+C^2-(aA+bB+cC)^2};$$

si donc on pose

$$A^2+B^2+C^2=G^2,$$

et si l'on appelle δ l'angle de la droite OG avec l'élément ds', et R la résultante, on a

$$(17)\qquad R=\frac{1}{2}\,i\,i'\,ds'\,G\sin\delta.$$

Portons sur la droite OG une longueur égale à G, et sur la direction de l'élément ds' une longueur égale à l'unité, la formule signifie que la résultante est proportionnelle à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux droites; elle est nulle quand l'élément ds' coïncide avec la droite OG. Elle est d'ailleurs, comme nous l'avons dit, perpendiculaire au plan du parallélogramme.

ACTION D'UN COURANT ÉLÉMENTAIRE SUR UN ÉLÉMENT DE COURANT.

251. La recherche de l'action d'un courant fermé sur un élément de courant se ramène, comme nous l'avons vu, au calcul des trois intégrales (15). Il est avantageux pour ce qui va suivre de transformer ces intégrales simples en intégrales doubles. Imaginons une surface continue S limitée par le courant fermé; projetons-la sur le plan des xy, et supposons que le point O soit situé en dehors de cette projection (*fig.* 71).

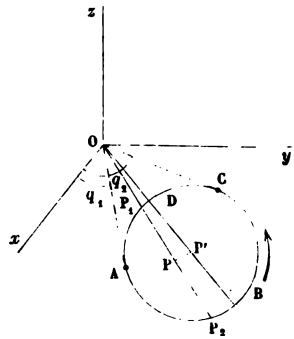
Soit P la projection d'un point quelconque M de cette surface; désignons par u le rayon vecteur OP et par q l'angle xOP. On sait que l'expression $x\,dy-y\,dx$ représente le double de l'aire du triangle POP', et l'on a

$$x\,dy-y\,dx=u^2\,dq.$$

Le courant marchant dans le sens indiqué par la flèche, l'angle q croît de q_1 à q_2 sur l'arc ABC, et décroît ensuite de q_2 à q_1 sur

l'arc CDA. En désignant par u_1 et u_2 les distances de l

Fig. 71.



aux points P_1 et P_2, où la droite OP coupe la courbe, on écrire

$$C = \int_{q_1}^{q_2} [u_2^2 \varphi(r_2) - u_1^2 \varphi(r_1)]\, dq.$$

Mais on a

$$u_2^2 \varphi(r_2) - u_1^2 \varphi(r_1) = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\partial . u^2 \varphi(r)}{\partial u}\, du,$$

l'intégration étant prise par rapport à la variable u du | au point P_2. La valeur de C devient ainsi

$$(18) \qquad C = \int\int \frac{\partial . u^2 \varphi(r)}{\partial u}\, du\, dq;$$

il y a maintenant deux variables indépendantes u et q, tégrale double s'étend à la partie du plan comprise courbe ABCD.

252. Pour évaluer cette intégrale, nous remarquons

$$\frac{\partial . u^2 \varphi(r)}{\partial u} = 2u\varphi(r) + u^2 \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial u};$$

de la relation

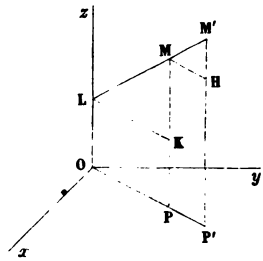
$$r^2 = u^2 + z^2,$$

on déduit d'ailleurs

$$r \frac{\partial r}{\partial u} = u + z \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Il s'agit de trouver $\frac{\partial z}{\partial u}$; pour avoir cette dérivée partielle, il faut laisser constante la variable q et faire varier u, ce qui donne

Fig. 72.



deux points P et P′ sur un même rayon OP (*fig.* 72); ces deux points sont les projections de deux points infiniment voisins M et M′ de la surface S; soit L le point où la droite MM′ rencontre l'axe Oz; on a

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\mathrm{M'H}}{\mathrm{MH}} = \frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{LK}} = \frac{z - \mathrm{OL}}{u}.$$

Mais L est le point où le plan tangent à la surface en M rencontre l'axe Oz; soit

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = p$$

l'équation de ce plan, α, β, γ étant les cosinus des angles que la normale à la surface au point M fait avec les axes, et p la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan, distance positive ou négative, suivant que cette perpendiculaire a la même direction que la normale ou une direction inverse. Nous aurons

$$\mathrm{OL} = \frac{p}{\gamma},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\gamma z - p}{\gamma u},$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{u}{r} + \frac{z(\gamma z - p)}{\gamma u r} = \frac{\gamma r^2 - pz}{\gamma u r},$$

$$(19) \qquad \mathrm{C} = \int\int \left[2\varphi(r) + r\varphi'(r) - \frac{pz}{\gamma r}\varphi'(r) \right] u\,du\,dq.$$

Le produit $u\,du\,dq$ représente un élément de l'aire plane limitée par la courbe ABCD dans le plan des xy; cet élément est la projection d'un élément $d\omega$ de la surface S, et l'on a

$$u\,du\,dq = \gamma\,d\omega;$$

l'expression précédente devient ainsi

$$(20)\qquad C = \sum \left\{ [2\varphi(r) + r\varphi'(r)]\gamma - \frac{pz}{r}\varphi'(r) \right\} d\omega.$$

Afin que $d\omega$ ait une valeur positive, la normale à la surface est menée dans une direction telle, qu'un observateur placé sur cette normale, les pieds contre la surface, voie le courant tourner de droite à gauche.

Si l'on appelle C′ une valeur moyenne de la quantité entre parenthèses, et ω l'aire de la surface S, limitée, comme nous l'avons dit, au courant fermé, nous pourrons écrire $C = C'\omega$. Nous aurons de même $A = A'\omega$, $B = B'\omega$.

On appelle *courant élémentaire* un courant fermé infiniment petit. On emploie surtout les dernières formules pour calculer l'action d'un courant élémentaire sur un élément de courant. Dans ce cas, la valeur moyenne de la parenthèse est sensiblement égale à sa valeur en un point quelconque M de la surface infiniment petite ω. On aura donc

$$(21)\qquad \left\{ \begin{aligned} A' &= [2\varphi(r) + r\varphi'(r)]\alpha - \frac{px}{r}\varphi'(r), \\ B' &= [2\varphi(r) + r\varphi'(r)]\beta - \frac{py}{r}\varphi'(r), \\ C' &= [2\varphi(r) + r\varphi'(r)]\gamma - \frac{pz}{r}\varphi'(r), \end{aligned} \right.$$

et l'on connaîtra les trois intégrales A, B, C,

$$(22)\qquad A = A'\omega,\quad B = B'\omega,\quad C = C'\omega.$$

ACTION D'UN SOLÉNOÏDE SUR UN ÉLÉMENT DE COURANT.

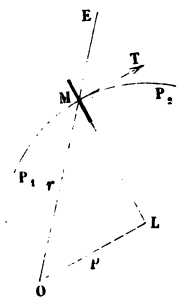
253. Un solénoïde est formé de courants élémentaires égaux entre eux, normaux à une même courbe directrice, et infini-

ıt rapprochés les uns des autres. L'action d'un courant ıé sur un élément se réduisant à une force appliquée au eu de l'élément, l'action du solénoïde, qui est composé ·ourants fermés, se réduit de même à une force appliquée ıilieu de l'élément. Appelons ω l'aire d'une surface li- e à l'un des petits courants, et g la distance de deux cou- ; consécutifs; le nombre des courants placés sur un élé- ı $d\sigma$ de la courbe directrice sera $\frac{d\sigma}{g}$, et l'action du solé- ɜ sur un élément de courant ds' placé à l'origine des co- nnées aura pour l'une de ses composantes

$$X = \frac{1}{2} i'ds' \frac{i\omega}{g} \left(b \int_1^2 C'd\sigma - c \int_1^2 B'd\sigma \right),$$

gration s'étendant à toute la longueur de la courbe direc- $P_1 P_2$ (*fig.* 73). D'après les conventions faites précédem-

Fig. 73.



, cette courbe doit être parcourue dans un sens tel, qu'un vateur placé sur une tangente MT, les pieds en M, la tête 'extrémité T, voie le petit courant tourner de droite à ıe. Cette droite MT est normale à la petite surface ω que peut supposer plane; x, y, z étant les coordonnées du M, on a

$$\gamma = \frac{dz}{d\sigma}, \quad \frac{p}{r} = \cos MOL = \cos EMT = \frac{dr}{d\sigma},$$

et

$$C' = [2\varphi(r) + r\varphi'(r)]\frac{dz}{d\sigma} - z\varphi'(r)\frac{dr}{d\sigma},$$

$$\int_1^2 C' d\sigma = \int_1^2 \{[2\varphi(r) + r\varphi'(r)]\,dz - z\,\varphi'(r)\,dr\}.$$

En intégrant le dernier terme par parties, on a

$$\int_1^2 z\,\varphi'(r)\,dr = [z\,\varphi(r)]_1^2 - \int_1^2 \varphi(r)\,dz,$$

et, par suite,

$$\int_1^2 C' d\sigma = -[z\,\varphi(r)]_1^2 + \int_1^2 [3\varphi(r) + r\,\varphi'(r)]\,dz,$$

ou, plus simplement,

$$(24) \qquad \int_1^2 C' d\sigma = -[z\,\varphi(r)]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{r^2}\frac{d.r^3\varphi(r)}{dr}\,dz.$$

FORMULE D'AMPÈRE.

254. Nous avons ramené les deux fonctions inconnues à une seule, à l'aide d'un premier cas d'équilibre; nous pouvons maintenant achever la détermination de ces fonctions, à l'aide d'un second cas d'équilibre. On a reconnu par l'expérience que l'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant, placé d'une manière quelconque, est nulle; les composantes X, Y, Z devant être nulles, quelle que soit la direction de l'élément ds', c'est-à-dire quelles que soient a, b, c, on doit avoir séparément, d'après l'équation (23),

$$\int A' d\sigma = 0, \quad \int B' d\sigma = 0, \quad \int C' d\sigma = 0.$$

Mais, lorsque le solénoïde est fermé, le premier terme étant nul, l'équation (24) se réduit à

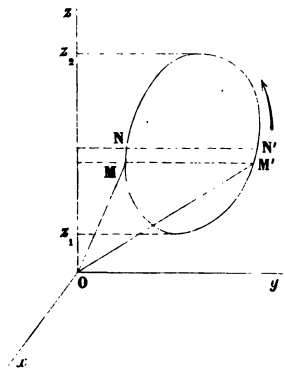
$$\int C' d\sigma = \int \frac{1}{r^2}\frac{d.r^3\varphi(r)}{dr}\,dz = \int \pi(r)\,dz;$$

on a posé, pour abréger,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d.r^3\varphi(r)}{dr}=\pi(r).$$

Supposons la courbe directrice plane et située dans le plan des yz (fig. 74); elle est parcourue dans un sens déterminé que nous

Fig. 74.



indiquons par une flèche. Deux parallèles à l'axe Oy infiniment voisines déterminent deux arcs MN, M'N', pour lesquels les valeurs de dz sont égales et de signes contraires; si donc on appelle r et r' les distances OM et OM', on aura

$$\int C'd\sigma=\int_1^2[\pi(r')-\pi(r)]\,dz=0.$$

255. On en conclut que la fonction $\pi(r)$ est une constante. Admettons en effet que cette quantité varie et augmente, par exemple, quand r croît de r_1 à r_2; on peut tracer la courbe de manière qu'elle soit située à droite de Oz, afin que r' soit plus grand que r, et de manière que le minimum de r soit égal ou supérieur à r_1, et le maximum de r' égal ou inférieur à r_2; on aura alors

$$r_1\leqq r<r'\leqq r_2,$$

et, par suite,

$$\pi(r')>\pi(r).$$

Chacun des termes de l'intégrale étant positif, il serait impossible que la somme fût nulle. On a donc

$$\pi(r) = h,$$

h étant une constante.

En vertu de la définition de $\pi(r)$, cette condition devient

$$d.r^3\varphi(r) = hr^2dr,$$

et, par l'intégration,

$$r^3\varphi(r) = \frac{hr^3}{3} + k,$$

k étant une nouvelle constante. On en déduit

$$\varphi(r) = \frac{h}{3} + \frac{k}{r^3};$$

mais on a posé (n° 247)

$$\frac{f(r)}{r} = \varphi(r),$$

il en résulte que

$$f(r) = \frac{hr}{3} + \frac{k}{r^2}.$$

Il est nécessaire que la constante h soit nulle, sans quoi la force électrodynamique deviendrait infinie à une distance infinie, ce qui est contraire à l'expérience. On a donc finalement

$$f(r) = \frac{k}{r^2},$$

et la formule (12) se réduit à

$$(a) \qquad F = \frac{kii'dsds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).$$

Telle est la formule fondamentale d'Ampère. L'expérience apprend que la constante k est positive.

CHAPITRE IX.

SUITE DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

Pôles d'un solénoïde. — Action d'un courant fermé sur un solénoïde. — Action d'un solénoïde sur un solénoïde. — Théorie du magnétisme d'Ampère. — Simplification de la formule d'Ampère. — Travail des forces électrodynamiques entre deux courants fermés. — Travail des forces électrodynamiques qu'un courant exerce sur lui-même.

PÔLES D'UN SOLÉNOÏDE.

256. Maintenant que nous connaissons la fonction $f(r)$, nous pouvons simplifier les formules relatives à l'action d'un solénoïde sur un élément de courant. Puisque $\varphi(r) = \frac{k}{r^3}$, la formule (24) se réduit à son premier terme

$$\int_1^2 C' d\sigma = -[z\varphi(r)]_1^2 = \frac{kz_1}{r_1^3} - \frac{kz_2}{r_2^3}.$$

On a de même

$$\int_1^2 A' d\sigma = \frac{kx_1}{r_1^3} - \frac{kx_2}{r_2^3},$$

$$\int_1^2 B' d\sigma = \frac{ky_1}{r_1^3} - \frac{ky_2}{r_3^2}.$$

En substituant dans l'équation (23) et posant

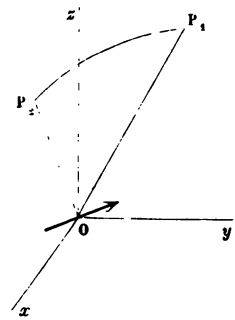
$$\frac{i\omega}{g} = \mu,$$

on a

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} k\mu i' ds' \left(\frac{bz_1 - cy_1}{r_1^3} - \frac{bz_2 - cy_2}{r_2^3}\right), \\ Y &= \frac{1}{2} k\mu i' ds' \left(\frac{cx_1 - az_1}{r_1^3} - \frac{cx_2 - az_2}{r_2^3}\right), \\ Z &= \frac{1}{2} k\mu i' ds' \left(\frac{ay_1 - bx_1}{r_1^3} - \frac{ay_2 - bx_2}{r_2^3}\right). \end{aligned}\right.$$

On voit par là que la force exercée par un solénoïde sur un élément de courant, et qui est appliquée au milieu O de l'élément, ne dépend que de la position des extrémités P_1, P_2 de la courbe directrice (*fig.* 75), et nullement de la forme de cette courbe; c'est pourquoi Ampère a donné à ces extrémités le nom

Fig. 75.



de *pôles* du solénoïde. On peut regarder cette force comme la résultante de deux forces appliquées toutes deux en O : l'une F_1, ayant pour composantes

$$(26)\quad \begin{cases} X_1 = \frac{1}{2} k\mu i' ds' \dfrac{bz_1 - cy_1}{r_1^3}, \\ Y_1 = \frac{1}{2} k\mu i' ds' \dfrac{cx_1 - az_1}{r_1^3}, \\ Z_1 = \frac{1}{2} k\mu i' ds' \dfrac{ay_1 - bx_1}{r_1^3}, \end{cases}$$

et se rapportant au pôle P_1; l'autre F_2, ayant pour composantes

$$(27)\quad \begin{cases} X_2 = -\frac{1}{2} k\mu i' ds' \dfrac{bz_2 - cy_2}{r_2^3}, \\ Y_2 = -\frac{1}{2} k\mu i' ds' \dfrac{cx_2 - az_2}{r_2^3}, \\ Z_2 = -\frac{1}{2} k\mu i' ds' \dfrac{ay_2 - bx_2}{r_2^3}, \end{cases}$$

et se rapportant au pôle P_2.

257. Des formules (27), on déduit

$$aX_1 + bY_1 + cZ_1 = 0,$$
$$x_1X_1 + y_1Y_1 + z_1Z_1 = 0;$$

d'où l'on conclut que la force F_1 est perpendiculaire au plan qui passe par l'élément ds' et la droite OP_1. On a d'ailleurs

$$\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} = \frac{1}{2}\frac{k\mu i' ds'}{r_1^3}\sqrt{r_1^2 - (ax_1 + by_1 + cz_1)^2},$$

et, par suite,

$$F_1 = \frac{1}{2}k\mu i' ds' \frac{\sin\delta_1}{r_1^2}, \tag{28}$$

δ_1 désignant l'angle que fait l'élément ds' avec la droite OP_1. Ainsi la force F_1 varie en raison inverse du carré de la distance du milieu O de l'élément au pôle P_1. Il reste à trouver le sens de la force. Pour cela, faisons coïncider l'axe des z avec l'élément de courant, et passer le plan zy par le pôle P_1; nous aurons

$$a = b = 0, \quad c = 1, \quad x_1 = 0, \quad Y_1 = Z_1 = 0, \quad X_1 = -\frac{1}{2}k\mu i' ds' \frac{y_1}{r_1^3}.$$

Un observateur placé sur Oz, c'est-à-dire sur l'élément de courant, de manière que le courant entre par ses pieds et sorte par sa tête, et regardant le pôle P_1, verra la force F_1 à sa gauche.

De même, la force F_2 est perpendiculaire au plan qui passe par l'élément de courant ds' et la droite OP_2, et égale à

$$F_2 = \frac{1}{2}k\mu i' ds' \frac{\sin\delta_2}{r_2^2},$$

δ_2 désignant l'angle de ds' avec OP_2. Un observateur, placé comme précédemment, et regardant le pôle P_2, verra cette force à sa droite.

Ainsi, quand on aura à considérer l'action d'un solénoïde sur un élément de courant, on réduira le solénoïde à ses deux pôles P_1 et P_2, et on déterminera, comme nous l'avons expliqué, les forces F_1 et F_2, appliquées toutes deux au milieu O

de l'élément; puis on prendra leur résultante R. Pour abréger le discours, on dit que ces forces F_1 et F_2 sont les actions des pôles eux-mêmes sur l'élément de courant; la constante μ est l'intensité de chaque pôle.

258. Nous avons trouvé l'action d'un solénoïde sur un élément de courant; il est évident que l'action de l'élément sur le solénoïde se réduit à une force égale et opposée $-R$, appliquée aussi au point O. On l'obtient en prenant la résultante des forces $-F_1$ et $-F_2$, et l'on dit que ces deux forces sont les actions de l'élément de courant sur les deux pôles. Ainsi, l'action d'un élément de courant sur un pôle P_1 est une force appliquée au milieu de l'élément, perpendiculaire au plan qui passe par l'élément et le pôle, et dirigée vers la droite d'un observateur placé sur le courant et regardant le pôle P_1. L'action de l'élément de courant sur le pôle P_2 est dirigée au contraire vers la gauche. Le pôle P_1 est un pôle boréal, le pôle P_2 un pôle austral. Les formules (26) et (27), changées de signe, donnent les composantes de ces forces, l'origine étant placée au milieu de l'élément.

ACTION D'UN COURANT FERMÉ SUR UN SOLÉNOÏDE.

259. Considérons l'action d'un courant fermé sur un pôle boréal P_1 d'un solénoïde. Les axes des coordonnées étant placés d'une manière quelconque, appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées du pôle P_1, x', y', z' celles du milieu d'un élément ds' du courant; l'action de cet élément sur le pôle P_1 se réduit à une force appliquée au milieu de l'élément, et dont les composantes, en vertu des équations (26), ont des expressions de la forme

$$X_1 = -\frac{1}{2} k\mu i' ds' \frac{b(z_1 - z') - c(y_1 - y')}{r^3}.$$

Si l'on place l'origine des coordonnées au pôle, ces expres-

sions se simplifient et deviennent

$$X_1 = \frac{1}{2} k\mu i' ds' \frac{bz' - cy'}{r^3},$$

$$Y_1 = \frac{1}{2} k\mu i' ds' \frac{cx' - az'}{r^3},$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} k\mu i' ds' \frac{ay' - bx'}{r^3}.$$

Nous allons démontrer d'abord que toutes les forces appliquées aux milieux des différents éléments du conducteur fermé admettent une résultante passant par le point P_1. Il suffit que la somme des moments de toutes ces forces par rapport à chacun des trois axes soit nulle. Nous remarquons que les cosinus a, b, c des angles que fait l'élément ds' avec les axes sont égaux respectivement à $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$. La somme des moments par rapport à l'axe des z est

$$\begin{aligned}
&\sum (x'Y_1 - y'X_1) \\
&= \frac{1}{2} k\mu i' \int \frac{x'(x'dz' - z'dx') + y'(y'dz' - z'dy')}{r^3} \\
&= \frac{1}{2} k\mu i' \int \frac{r^2 dz' - z'(x'dx' + y'dy' + z'dz')}{r^3} \\
&= \frac{1}{2} k\mu i' \int \frac{r dz' - z' dr}{r^2} = \frac{1}{2} k\mu i' \int d\frac{z'}{r} \\
&= \frac{1}{2} k\mu i' \left(\frac{z'}{r}\right)_1^2.
\end{aligned}$$

Lorsque le conducteur est fermé, cette somme est nulle.

260. Calculons maintenant cette résultante. Ses projections sur les trois axes des coordonnées sont

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned}
X &= \frac{1}{2} k\mu i' \int \frac{z'dy' - y'dz'}{r^3}, \\
Y &= \frac{1}{2} k\mu i' \int \frac{x'dz' - z'dx'}{r^3}, \\
Z &= \frac{1}{2} k\mu i' \int \frac{y'dx' - x'dy'}{r^3}.
\end{aligned} \right.$$

Ces intégrales ont la même forme, au signe près, que les intégrales A, B, C qui nous ont servi à trouver l'action d'un courant fermé sur un élément de courant (n° 249); il suffit de remplacer dans ces dernières $\varphi(r)$ par sa valeur $\frac{k}{r^3}$.

Nous pouvons aussi transformer ces intégrales simples en intégrales doubles. Imaginons une surface limitée au courant fermé; appelons x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de cette surface, α, β, γ les cosinus des angles que fait la normale à la surface en ce point avec les axes des coordonnées, la normale étant menée dans une direction telle, qu'un observateur placé sur cette normale, les pieds sur la surface, voie le courant tourner de droite à gauche; appelons enfin p la distance de l'origine au plan tangent et $d\omega'$ un élément de la surface; nous aurons alors, en appliquant la formule (20) du n° 252, et changeant les signes,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}k\mu i'\sum\left(\frac{\alpha}{r^3}-\frac{3px'}{r^5}\right)d\omega',\\ Y &= \frac{1}{2}k\mu i'\sum\left(\frac{\beta}{r^3}-\frac{3py'}{r^5}\right)d\omega',\\ Z &= \frac{1}{2}k\mu i'\sum\left(\frac{\gamma}{r^3}-\frac{3pz'}{r^5}\right)d\omega'.\end{aligned}\right.$$

Ainsi l'action d'un courant fermé sur un pôle boréal P_1 d'un solénoïde se réduit à une force appliquée au point P_1, et dont les composantes sont exprimées par les formules (29) ou (30). L'action du courant sur le pôle austral P_2 se réduit de même à une force appliquée en P_2, et pour avoir ses composantes, il suffit de changer le signe de μ dans les formules précédentes, l'origine étant supposée placée en P_2. Cela signifie en réalité que l'action d'un courant fermé sur un solénoïde se compose de deux forces appliquées, l'une au pôle P_1, l'autre au pôle P_2.

Lorsque le courant fermé est infiniment petit, les for-

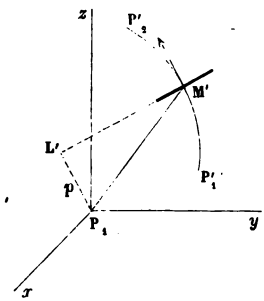
mules (30) deviennent

$$(31)\quad \begin{cases} X = \frac{1}{2} k \mu i' \omega' \left(\frac{\alpha}{r^3} - \frac{3px'}{r^5}\right), \\ Y = \frac{1}{2} k \mu i' \omega' \left(\frac{\beta}{r^3} - \frac{3py'}{r^5}\right), \\ Z = \frac{1}{2} k \mu i' \omega' \left(\frac{\gamma}{r^3} - \frac{3pz'}{r^5}\right). \end{cases}$$

ACTION D'UN SOLÉNOÏDE SUR UN SOLÉNOÏDE.

261. Considérons un second solénoïde $P'_1 P'_2$ (*fig.* 76), formé de courants fermés infiniment petits d'aire ω' et d'intensité i';

Fig. 76.



l'action de chacun de ces courants fermés sur le pôle P_1 du premier solénoïde se réduisant, comme nous l'avons vu, à une force appliquée en P_1 et donnée par les formules (31), l'action du second solénoïde sur ce même pôle se réduira aussi à une force unique appliquée en P_1; comme il y a sur chaque élément $d\sigma'$ de la courbe directrice $P'_1 P'_2$ un nombre de petits courants marqués par $\frac{d\sigma'}{g'}$, g' étant la distance de deux courants consécutifs, les composantes de cette force seront de la forme

$$X = \frac{1}{2} k \mu \frac{i'\omega'}{g'} \int \left(\frac{\alpha}{r^3} - \frac{3px'}{r^5}\right) d\sigma'.$$

Les lettres α, β, γ désignent ici les cosinus des angles que

fait la tangente à la courbe $P'_1 P'_2$ avec les axes des coordonnées, et p la perpendiculaire $P_1 L'$ abaissée de l'origine P_1 sur le plan du courant. Mais on a

$$\alpha = \frac{dx'}{d\delta'}, \quad \frac{p}{r} = \frac{dr}{d\sigma'}.$$

On pose d'ailleurs

$$\frac{i'\omega'}{g'} = \mu',$$

μ' étant l'intensité du second solénoïde.

La formule précédente devient ainsi

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} k\mu\mu' \int \left(\frac{dx'}{r^3} - \frac{3x'dr}{r^4}\right) \\ &= \frac{1}{2} k\mu\mu' \int d\left(\frac{x'}{r^3}\right) = \frac{1}{2} k\mu\mu' \left(\frac{x'}{r^3}\right)_1^2. \end{aligned}$$

D'après cela, l'action du second solénoïde sur le pôle boréal P_1 du premier est une force appliquée en P_1 et ayant pour composantes

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{1}{2} k\mu\mu' \left(\frac{x'_2}{r_2^3} - \frac{x'_1}{r_1^3}\right), \\ Y &= \frac{1}{2} k\mu\mu' \left(\frac{y'_2}{r_2^3} - \frac{y'_1}{r_1^3}\right), \\ Z &= \frac{1}{2} k\mu\mu' \left(\frac{z'_2}{r_2^3} - \frac{z'_1}{r_1^3}\right). \end{aligned} \right.$$

262. On peut regarder cette force comme étant la résultante de deux forces appliquées en P_1 et ayant pour composantes, l'une

$$\frac{1}{2} k\mu\mu' \frac{x'_2}{r_2^3}, \quad \frac{1}{2} k\mu\mu' \frac{y'_2}{r_2^3}, \quad \frac{1}{2} k\mu\mu' \frac{z'_2}{r_2^3},$$

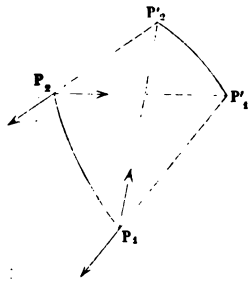
l'autre

$$-\frac{1}{2} k\mu\mu' \frac{x'_1}{r_1^3}, \quad -\frac{1}{2} k\mu\mu' \frac{y'_1}{r_1^3}, \quad -\frac{1}{2} k\mu\mu' \frac{z'_1}{r_1^3}.$$

La première, dont l'intensité est $\dfrac{\frac{1}{2} k\mu\mu'}{r_2^2}$, est dirigée suivant la droite $P_1 P'_2$ (*fig.* 77); elle est attractive et varie en raison inverse

du carré de la distance $P_1 P'_2$. La seconde, dont l'intensité est $\frac{\frac{1}{2} k \mu \mu'}{r_1^2}$, est dirigée suivant le prolongement de la droite $P'_1 P_1$; elle est répulsive et varie aussi en raison inverse du carré de la distance $P_1 P'_1$.

Fig. 77.



Pour avoir l'action du second solénoïde sur le pôle austral P_2 du premier, il suffira, dans les formules précédentes, de changer le signe de μ et de supposer que l'origine est placée en P_2; cette action se composera donc de deux forces appliquées en P_2, l'une répulsive suivant $P_2 P'_2$, l'autre attractive suivant $P_2 P'_1$.

Tout se passe comme si, les solénoïdes étant réduits à leurs extrémités, c'est-à-dire à leurs pôles, ces pôles s'attiraient ou se repoussaient proportionnellement au produit de leurs intensités et en raison inverse du carré de la distance. On dira que deux pôles de même nom se repoussent et que deux pôles de noms contraires s'attirent.

THÉORIE DU MAGNÉTISME D'AMPÈRE.

263. L'analogie si frappante qui existe entre les propriétés des solénoïdes et celles des aimants a conduit Ampère à penser que les phénomènes magnétiques sont produits par des courants électriques. Il a assimilé les aimants à des solénoïdes, et il a fait rentrer ainsi le magnétisme dans l'électricité.

Remarquons que l'action d'un courant élémentaire est la même que celle d'un solénoïde infiniment petit $p_1 p_2$ normal au plan

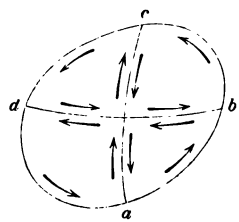
du courant (*fig.* 78). En effet, soit l la longueur très-petite $p_1 p_2$; on peut remplacer le courant élémentaire proposé, dont l'in-

Fig. 78.

tensité est i, par n courants élémentaires égaux entre eux, d'intensité $\frac{i}{n}$, disposés perpendiculairement à la droite $p_1 p_2$, à la distance $g = \frac{l}{n}$ les uns des autres; ces n courants forment un solénoïde dont l'intensité est $\mu = \frac{i\omega}{l}$. Ainsi, dans les idées d'Ampère, une molécule magnétique est une molécule autour de laquelle circule un courant électrique élémentaire, et l'aimantation consiste dans la production ou simplement dans l'orientation de ces courants élémentaires.

264. On peut, au contraire, substituer des aimants aux courants, et remplacer ainsi les forces électriques par des forces s'exerçant entre des points déterminés et variant suivant la loi de Newton. Considérons, en effet, un courant fermé quelconque, d'intensité i. Imaginons, comme nous l'avons fait précédemment, une surface limitée au courant (*fig.* 79); décomposons

Fig. 79.



cette surface en plusieurs parties, et supposons que le contour de chaque partie soit parcouru par un courant d'intensité i, dans un sens tel, qu'un observateur voie tous les courants tourne

même sens. Chaque ligne intérieure appartient à deux s contigus et est parcourue en sens contraires par les s relatifs à ces deux contours. Il en résulte que les ac- toutes les portions intérieures se détruisent deux à ne reste que les portions extérieures *ab*, *bc*, *cd*, *da*, es forment le courant proposé. D'après cela, si l'on la surface décomposée en une infinité de parties in- t petites $d\omega$, on pourra remplacer le courant proposé infinité de courants élémentaires $id\omega$; or à chacun de ts courants on peut substituer un petit aimant $p_1 p_2$ à l'élément de surface et d'une intensité égale à $\frac{id\omega}{l}$. du point p_1 forme une surface magnétique boréale, le point p_2 une surface magnétique australe; l est la dis- es deux surfaces, et sur chacune d'elles l'intensité ma- e, rapportée à l'unité de surface, est $\frac{i}{l}$. Le courant sera nplacé par deux surfaces magnétiques, l'une boréale, ustrale, infiniment rapprochées et limitées au courant. manière de ramener les forces électrodynamiques à ces magnétiques ne paraît avoir aucune importance ue; mais elle peut avoir une certaine utilité, parce que, nières étant des forces centrales, c'est-à-dire des forces t de points fixes, on peut leur appliquer immédiate- méthode du potentiel.

SIMPLIFICATION DE LA FORMULE D'AMPÈRE.

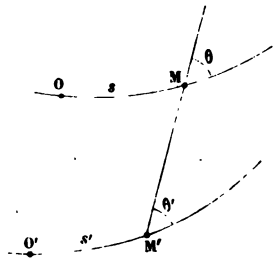
Reprenons la formule d'Ampère (n° 255)

$$F = \frac{kii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right),$$

me l'action mutuelle de deux éléments ds et ds' des s. Nous déterminons les positions des milieux M et M' x éléments par les arcs s et s' comptés à partir de deux ixes O et O' sur les conducteurs (*fig.* 80). La distance r ux points M et M' est alors une fonction des deux va-

riables indépendantes s et s', et nous avons démontré (n° 2

Fig. 80.



les relations suivantes :

$$\cos\theta = \frac{\partial r}{\partial s}, \quad \cos\theta' = -\frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\cos\varepsilon = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'};$$

on en déduit

$$\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta' = \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}.$$

La quantité $\sqrt{r}$ ou $r^{\frac{1}{2}}$ est aussi une fonction des deux variables indépendantes s et s', et l'on a

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} = \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial s},$$

$$\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} = -\frac{1}{4}r^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{1}{2}r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'};$$

d'où

$$-2r^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} = \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

et, par suite,

$$\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta' = -2r^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}.$$

La formule (a) se réduit ainsi à la forme plus simple

$$(a') \qquad F = -\frac{2kii'\,ds\,ds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}.$$

C'est cette forme que nous emploierons pour le calcul du travail.

TRAVAIL ENTRE DEUX COURANTS FERMÉS.

266. Considérons deux conducteurs fermés C et C′ parcourus par des courants d'intensité i et i'; par suite de la déformation ou du déplacement relatif des conducteurs, la distance r de deux points déterminés M et M′ de ces conducteurs varie avec le temps. On doit donc regarder r comme une fonction d'une troisième variable indépendante t. La variation de la distance MM′ dans le temps infiniment petit dt, par suite de la mobilité des conducteurs, sera $\frac{\partial r}{\partial t}dt$, et le travail élémentaire de la force F qui s'exerce entre les éléments ds et ds' des conducteurs aura pour expression

$$-\mathrm{F}\frac{\partial r}{\partial t}dt = 2kii'dsds'\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial t}dt\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'},$$

ou, plus simplement,

$$4kii'dsds'\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}dt.$$

Le travail pendant le temps dt de toutes les forces qui s'exercent entre les deux conducteurs sera donné par la formule

$$(3)\qquad d\mathfrak{T} = 4kii'dt\int\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}dsds',$$

la double intégration s'étendant à toute la longueur des deux conducteurs.

Nous allons transformer cette expression. En intégrant par parties, on a

$$\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}ds = \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right)_{s_0}^{s_1} - \int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s}ds,$$

et, par suite,

$$\int d\mathfrak{T} = 4ii'\,dt \int \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\,ds$$

$$- 4ii'\,dt \int\int \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s}\,ds\,ds.$$

On aura de même par symétrie

$$d\mathfrak{T} = 4ii'\,dt \int \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)_{s'} ds$$

$$- 4ii'\,dt \int\int \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s}\,ds\,ds.$$

En ajoutant ces deux expressions et remarquant que

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s} - \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'} = \frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)}{\partial t},$$

on a

$$(35)\quad \begin{aligned} \int d\mathfrak{T} &= 2ii'\,dt \int \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right)_{s'} ds' - 2ii'\,dt \int \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)_{s} ds \\ &\quad - 2ii'\,dt \int\int \frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right)}{\partial t}\,ds\,ds'. \end{aligned}$$

267. Lorsque les deux conducteurs sont fermés, les premières parties du second membre sont nulles, et la formule précédente se réduit à

$$(36)\qquad d\mathfrak{T} = -2ii'\,dt \int\int \frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right)}{\partial t}\,ds\,ds'.$$

Posons

$$(\alpha)\qquad W = -2k \int\int \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\,ds\,ds';$$

cette quantité W est une fonction de t. Si chacun des

ducteurs conserve une longueur invariable, les limites de l'intégrale double étant des constantes, on a

$$\frac{dW}{dt} = -2k\int\int\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right)}{\partial t}\,ds\,ds',$$

et, par suite,

$$(37)\qquad d\mathfrak{T} = ii'\frac{dW}{dt}\,dt = ii'\,dW.$$

La quantité W peut être mise sous une autre forme; on a d'abord

$$W = -\frac{k}{2}\int\int\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,ds\,ds',$$

$$(\alpha')\qquad W = \frac{k}{2}\int\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds'.$$

On peut écrire encore

$$W = \frac{k}{2}\int\int r\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\,ds\,ds';$$

en intégrant par parties, et tenant compte de la relation (6) du n° 244, on a

$$\int r\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\,ds = \left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)_1^2 - \int\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s'}\right)}{\partial s}\,ds = \int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds,$$

il en résulte

$$(\alpha'')\qquad W = \frac{k}{2}\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'.$$

Cette quantité W est ce que M. Helmholtz appelle le potentiel relatif à l'action mutuelle de deux courants d'intensité 1, parcourant les conducteurs, dans des sens déterminés. Si l'on change le sens de l'un des courants, $\cos\varepsilon$ changeant de signe, la valeur de W change elle-même de signe.

TRAVAIL ENTRE UN AIMANT ET UN COURANT FERMÉ.

268. Cherchons d'abord le travail des forces qui s'exercent entre un courant fermé et un pôle d'un solénoïde ou d'un aimant. Nous avons vu (n° 260) que l'action d'un courant fermé sur un pôle boréal se réduit à une résultante unique appliquée au pôle; les formules (29) ou (30) donnent les composantes de cette force, lorsque l'origine est au pôle. L'origine occupant une position quelconque, si l'on appelle x, y, z les coordonnées du pôle, les formules (30) deviennent

$$X = \frac{k\mu i}{2}\int\int\left[\frac{\alpha}{r^3} - \frac{3p(x'-x)}{r^5}\right]d\omega.$$

Comme on a d'ailleurs

$$p = \alpha(x'-x) + \beta(y'-y) + \gamma(z'-z),$$

$$\frac{\partial\frac{p}{r^3}}{\partial x} = -\frac{\alpha}{r^3} + \frac{3p(x'-x)}{r^5},$$

elles se réduisent à

$$X = -\frac{k\mu i}{2}\int\int\frac{\partial\frac{p}{r^3}}{\partial x}d\omega.$$

Si l'on pose

$$(\beta)\qquad V = \frac{k}{2}\int\int\frac{p\,d\omega}{r^3},$$

on a enfin

$$X = -\mu i\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y = -ki\frac{\partial V}{\partial y},\quad Z = -ki\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Le travail des forces résultant de l'action mutuelle du courant et du pôle, dépendant du déplacement relatif du pôle et du conducteur, on peut supposer le conducteur fixe et le pôle seul mobile. Il suffit alors de prendre le travail de la force qui agit sur le pôle; ce travail est

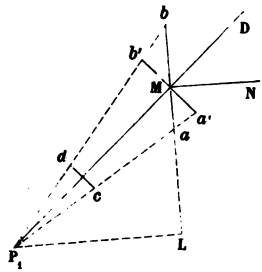
$$(38)\qquad d\mathfrak{T} = -\mu i\,dV.$$

Lorsque le pôle est austral, on change le signe de μ.

269. La fonction V a ici une signification géométrique très-simple : du pôle P_1 comme centre, avec un rayon égal à l'unité, décrivons une sphère et considérons la portion Ω détachée sur la surface de cette sphère par le cône qui a son sommet en P_1 et pour directrice le conducteur fermé. Soit M un point quelconque de la surface S limitée au courant fermé, MN la normale en ce point, menée dans un sens tel qu'un observateur placé sur cette normale voie le courant tourner de droite à gauche; la lettre p désigne la longueur de la perpendiculaire P_1L abaissée du point P_1 sur le plan tangent en M (*fig.* 81); on a

$$\frac{p}{r} = \cos MP_1L = \cos DMN.$$

Fig. 81.



A un élément ab ou $d\omega$ de la surface S correspond un élément cd ou $d\Omega$ de la sphère dont le rayon est 1 et un élément $a'b'$ ou $r^2 d\Omega$ de la sphère dont le rayon est P_1M; mais l'élément $a'b'$ peut être regardé comme la projection de l'élément $d\omega$ sur le plan perpendiculaire à P_1M; on a donc

$$r^2 d\Omega = \pm d\omega \times \cos DMN = \pm \frac{p\,d\omega}{r},$$

et, par suite,

$$d\Omega = \pm \frac{p\,d\omega}{r^3};$$

on prendra le signe + ou le signe —, suivant que la normale MN fait un angle aigu ou obtus avec le prolongement MD du rayon vecteur P_1M.

L'expression du potentiel devient ainsi

$$(\beta') \qquad V = \frac{k}{2} \sum (\pm d\Omega) = \pm \frac{k}{2} \Omega.$$

Ainsi la fonction V est proportionnelle à l'ouverture du cône sous lequel du pôle on voit le courant.

270. Considérons, en général, l'action d'un aimant sur un courant fermé. Si l'on cherche, comme précédemment, la fonction V relative à l'action de chacun des pôles élémentaires sur le courant fermé, et si l'on pose

$$W = -\sum \mu V,$$

le travail des forces qui s'exercent entre le courant fermé et l'aimant aura pour expression

$$(39) \qquad d\mathfrak{T} = i\,dW.$$

Ceci résulte d'ailleurs immédiatement d'une remarque faite au n° 264. Nous avons vu qu'on peut remplacer le courant fermé par une surface magnétique ; le calcul du travail est alors le même que s'il s'agissait de deux aimants.

CHAPITRE X.

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION.

Formule de Weber. — Action mutuelle de deux courants d'intensités constantes dans des conducteurs fixes. — Action mutuelle de deux courants d'intensités variables dans des conducteurs fixes. — Induction d'un courant sur sur lui-même par le changement d'intensité. — Induction entre deux courants par le changement d'intensité. — Action mutuelle de deux courants dans des conducteurs mobiles. — Induction d'un courant sur lui-même par le changement de forme du conducteur. — Induction entre deux courants par le mouvement des conducteurs. — Machines électromotrices et machines inverses.

FORMULE DE WEBER.

271. Nous avons étudié deux catégories principales de phénomènes électriques : les phénomènes d'électricité statique qui sont régis par la loi de Coulomb

$$(a) \qquad -\frac{mm'}{r^2},$$

et les phénomènes électrodynamiques qui sont compris dans la loi d'Ampère (n° 265)

$$(b) \qquad -\frac{2kii'dsds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}.$$

La première donne l'action mutuelle de deux masses électriques m et m' au repos, la seconde celle de deux éléments de courant. M. Weber est parvenu à réunir ces deux lois dans une loi plus générale, comprenant les deux catégories de phénomènes; il admet que l'action mutuelle de deux masses électriques n'est pas la même quand ces masses sont en mouvement que lorsqu'elles sont en repos, et il a trouvé que cette

action est représentée par la formule

$$(c) \qquad -mm'\left(\frac{1}{r^2}+\frac{k}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right).$$

On reconnaît immédiatement que cette formule comprend celle de Coulomb, puisque, lorsque les masses électriques sont au repos, le second terme est nul. Nous verrons qu'elle comprend aussi celle d'Ampère. M. Weber raisonne dans l'hypothèse des deux fluides; dans cet ordre d'idées, on regarde un courant d'intensité i comme formé de deux courants d'électricités contraires, marchant dans des sens opposés avec la même vitesse u, et ayant chacun une intensité égale à $\frac{i}{2}$. Si l'on appelle ω la section très-petite du conducteur et ρ la densité des fluides électriques, la quantité de chacun des fluides qui traverse la section du fil dans l'unité de temps est $\rho\omega u$, et l'on a, pour chacun des courants,

$$\frac{i}{2}=\rho\omega u,$$

et, par suite,

$$i=2\rho\omega u.$$

Un élément ds du conducteur contient des masses égales $+m$ et $-m$ de fluide positif et de fluide négatif, et l'on a

$$m=\rho\omega ds,$$

et, par suite,

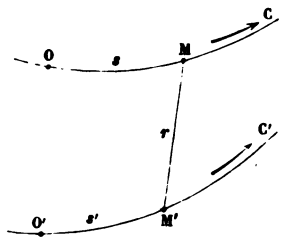
$$(1) \qquad 2mu=ids.$$

ACTION MUTUELLE DE DEUX COURANTS D'INTENSITÉS CONSTANTES DANS DES CONDUCTEURS FIXES.

272. Considérons deux courants d'intensités constantes i et i' dans des conducteurs fixes C et C', et supposons d'abord que les aires ω et ω' des sections soient constantes; les vitesses u et u' de l'électricité sont alors constantes le long de chacun d'eux. La position d'une masse m de fluide positif se mouvant sur le premier conducteur, avec la vitesse u, dans

le sens de la flèche, est déterminée à chaque instant par l'arc s compté à partir d'un point fixe O sur le conducteur (*fig.* 82).

Fig. 82.



De même, la position d'une masse m' de fluide positif se mouvant sur le second conducteur, avec la vitesse u', dans le sens de la flèche, est déterminée à chaque instant par l'arc s' compté à partir d'un point fixe O' sur ce conducteur. On doit donc regarder s et s' comme des fonctions du temps, et l'on a

$$\frac{ds}{dt} = u, \quad \frac{ds'}{dt} = u'.$$

La distance r des deux masses en mouvement est une fonction des arcs s et s', et par conséquent une fonction du temps. Il en est de même de la quantité $\sqrt{r}$. On a donc, en différentiant une première fois cette fonction composée,

$$(2) \qquad \frac{d\sqrt{r}}{dt} = \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} = u\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} + u'\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}$, $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}$ sont elles-mêmes des fonctions de s et s', et par conséquent des fonctions de t; on aura donc, en différentiant une seconde fois,

$$\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = u\left(\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}\frac{ds'}{dt}\right) + u'\left(\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\frac{ds'}{dt}\right),$$

$$(3) \qquad \frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = u^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2} + 2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'} + u'^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}.$$

En remplaçant $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ par sa valeur dans la formule de Weber, on obtient l'action exercée par la masse $+m$ sur la masse $+m'$,

$$-mm'\left[\frac{1}{r^2}+\frac{k}{\sqrt{r}}\left(u^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2}+2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}+u'^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\right)\right].$$

Pour avoir l'action exercée par la masse $-m$ sur la masse $+m'$, il suffit de changer, dans l'expression précédente, le signe de m et aussi celui de u; car la masse $-m$ marche en sens inverse et par conséquent avec la vitesse $-u$; on a ainsi, pour cette seconde action,

$$+mm'\left[\frac{1}{r^2}+\frac{k}{\sqrt{r}}\left(u^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2}-2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}+u'^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\right)\right].$$

En ajoutant ces deux forces, on a l'action exercée sur la masse $+m'$ par l'ensemble des deux masses $+m$ et $-m$ contenues dans un même élément ds du conducteur C, savoir

$$-\frac{4kmm'uu'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'};$$

si l'on remplace $2mu$ par ids, et si l'on représente cette action par $\frac{F}{2}$, il vient

$$\text{(I)}\qquad \frac{F}{2}=-\frac{2km'u'ids}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}.$$

Pour avoir l'action exercée par l'ensemble des deux masses $+m$ et $-m$ sur la masse $-m'$, il suffit, dans l'expression précédente, de changer les signes de m' et de u'; on trouve la même force $\frac{F}{2}$. La somme de ces deux forces

$$F=-\frac{4km'u'ids}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'},$$

ou

$$F=-\frac{2kii'dsds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}$$

est l'action exercée par l'élément ds sur l'élément ds'; c'est précisément la force électrodynamique d'Ampère (b).

273. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que chaque conducteur a une égale section dans toute sa longueur; si la section est inégale, il faudra regarder ω comme une fonction de s; la vitesse u du courant ne sera pas la même aux différents points du conducteur, ce sera aussi une fonction de s. La vitesse u de la masse $+m$ se mouvant dans le conducteur C sera donc variable, et l'on aura

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dt} = u\frac{du}{ds}.$$

On aura de même sur l'autre conducteur

$$\frac{du'}{dt} = u'\frac{du'}{ds'}.$$

Quand nous avons différentié l'expression (2) de $\frac{d\sqrt{r}}{dt}$, nous avons regardé u et u' comme des constantes; ces quantités étant maintenant des fonctions du temps, il faudra à l'expression (3) de $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ ajouter les termes

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{du'}{dt},$$

ou

$$u\frac{du}{ds}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} + u'\frac{du'}{ds'}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}.$$

Quand on considère l'action de $+m$ ou celle de $-m$ sur $+m'$, ces termes additionnels restent les mêmes dans les parenthèses; comme le signe est changé en avant de la parenthèse, ces termes disparaissent dans la somme (I). Ainsi l'inégalité de la section ne change pas la force $\frac{F}{2}$ qui agit sur la masse $+m'$ ou sur la masse $-m'$, et par conséquent la force électrodynamique F reste la même.

274. Il est aisé de voir que l'ensemble des forces $\frac{F}{2}$ qui agissent sur la masse $+m'$ ne modifie pas le mouvement de cette masse dans le conducteur C'. En effet, la projection de la force $\frac{F}{2}$ sur la trajectoire est

$$\frac{F}{2}\cos\theta' = -\frac{F}{2}\frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{2km'u'ids}{\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}$$

$$= 4km'u'ids\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'} = 2km'u'ids\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right)^2}{\partial s}.$$

La somme des projections de toutes les forces exercées par les différents éléments du courant fermé C sur la masse $+m'$ est

$$2km'u'i\int\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right)^2}{\partial s}ds = 2km'u'i\left[\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right)^2\right]_1^2 = 0.$$

Ainsi la résultante des forces $\frac{F}{2}$ qui agissent sur la masse $+m'$ est normale à la trajectoire, et par conséquent n'a pas d'influence sur le mouvement de cette masse. De même pour la masse $-m'$.

On en conclut aussi que le travail des forces F qui s'exercent entre deux courants d'intensités constantes, dans des conducteurs fixes, est nul.

Les mêmes conclusions peuvent être appliquées à un courant d'intensité constante agissant sur lui-même dans un conducteur de forme invariable.

Les forces électrodynamiques F doivent être considérées comme appliquées aux divers éléments des conducteurs; pour maintenir ces conducteurs immobiles, il faut leur appliquer des forces extérieures qui fassent équilibre aux forces électrodynamiques.

La loi de Weber non-seulement comprend celles de Coulomb et d'Ampère; mais, comme nous allons voir, elle ex-

plique complétement les phénomènes d'induction dont la loi d'Ampère ne donnerait qu'une idée imparfaite et restreinte.

ACTION MUTUELLE DE DEUX COURANTS D'INTENSITÉS VARIABLES DANS DES CONDUCTEURS FIXES.

275. Dans ce qui précède, nous avons supposé les intensités constantes et les conducteurs fixes; supposons maintenant que, les deux conducteurs C et C′ restant toujours fixes, les intensités i et i' des courants soient variables. L'intensité i étant variable avec le temps, la vitesse u en un même point du conducteur sera aussi variable avec le temps. D'ailleurs, si la section est inégale, au même instant elle ne sera pas la même aux différents points du conducteur; u sera donc une fonction de s et de t, et, si l'on considère le mouvement de la masse $+m$, on aura

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

On aura de même, sur le second conducteur,

$$\frac{du'}{dt} = u'\frac{\partial u'}{\partial s'} + \frac{\partial u'}{\partial t}.$$

Il faudra dans l'expression de $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ ajouter les termes

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{du'}{dt},$$

ou

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\left(u\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial s'} + \frac{\partial u'}{\partial t}\right),$$

ou

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} + u'\frac{\partial u'}{\partial s'}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right) + \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial u'}{\partial t}\right).$$

La première partie, celle qui se rapporte à l'inégalité de la section, disparaît du résultat, comme nous l'avons vu. Examinons l'autre partie qui se rapporte à la variation de l'intensité.

Si l'on considère les actions de $+m$ et de $-m$ sur $+m'$, le terme $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}$ change de signe dans la parenthèse; le terme suivant $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial u'}{\partial t}$ ne change pas; le signe étant changé en avant de la parenthèse, le dernier terme se détruit dans la somme, mais le précédent s'ajoute. Ainsi l'action de l'ensemble des deux masses $+m$ et $-m$ sur $+m'$ est

$$\frac{F}{2}+E=-\frac{4kmm'uu'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}-\frac{2kmm'}{\sqrt{r}}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

L'action des deux masses $+m$ et $-m$ sur $-m'$ est

$$\frac{F}{2}-E=-\frac{4kmm'uu'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}+\frac{2kmm'}{\sqrt{r}}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

276. Nous supposerons dans ce qui suit que la densité ρ du fluide reste constante, et par conséquent que la variation d'intensité correspond à une variation de la vitesse du fluide. De la relation $i=2\rho\omega u$ (n° 271), on déduit

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2\rho\omega}\frac{di}{dt},\quad 2m\frac{\partial u}{\partial t}=ds\frac{di}{dt},$$

et l'on a

$$\text{(I)}\qquad \frac{F}{2}=-\frac{2km'u'ids}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'},$$

$$\text{(II)}\qquad E=-\frac{km'ds}{\sqrt{r}}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{di}{dt}.$$

Ainsi l'élément ds du premier courant exerce sur la masse $+m'$ une action égale à la somme des deux forces $\frac{F}{2}$ et E, et sur la masse $-m'$ une action égale à leur différence $\frac{F}{2}-E$. La somme de ces deux actions est la force électrodynamique F qui s'exerce entre les deux éléments ds et ds'; la variation de l'intensité ne change pas l'expression de cette force.

Nous avons vu que la résultante des forces $\frac{F}{2}$ qui agissent sur $+m'$ ou sur $-m'$ est normale à la trajectoire, et par conséquent n'a aucune influence sur le mouvement de ces masses; elle produit simplement une pression contre le conducteur ou l'enveloppe isolante, et constitue ce qu'on appelle la *force électrodynamique*, que l'on considère comme appliquée au conducteur. Il n'en est pas de même des forces $+E$ qui agissent sur $+m'$, et des forces $-E$ qui agissent sur $-m'$; elles admettent des résultantes égales et opposées qui ne sont pas normales à la trajectoire; elles tendent donc à faire mouvoir les deux masses dans des sens opposés, et par conséquent constituent ce qu'on appelle une *force électromotrice*.

277. Calculons le travail de ces forces E. Le travail pendant le temps dt de la force E qui agit sur la masse $+m'$ en mouvement est

$$E\cos\theta' \times u'\,dt = -\frac{k\,m'u'\,ds\,dt}{2r}\cos\theta\cos\theta'\frac{di}{dt}.$$

Le travail de leur résultante est

$$-\frac{k}{2}m'u'\frac{di}{dt}dt\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}ds.$$

Le travail des forces $-E$ qui agissent sur la masse $-m'$ est égal et de même signe; le travail des forces $\pm E$ qui agissent sur les deux masses $+m'$ et $-m'$ contenues dans l'élément ds' est donc

$$-k\,m'u'\frac{di}{dt}dt\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}ds,$$

ou

$$-\frac{k}{2}i'\,ds'\frac{di}{dt}dt\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}ds.$$

Pour l'ensemble des masses électriques en mouvement dans le conducteur C', le travail a pour valeur

$$(4)\qquad -\frac{k}{2}i'\,di\int\int\frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}ds\,ds' = -W\,i'\,di,$$

W étant le potentiel relatif à l'action mutuelle de deux cou-

rants d'intensité 1 parcourant les deux conducteurs (n° 267). Tel est le travail des forces E qui agissent sur le courant C'; ce travail résulte de la variation d'intensité du courant C.

Le travail des mêmes forces agissant sur le courant C est $-Widi'$; il résulte de la variation d'intensité du courant C'. Le travail de l'action mutuelle des deux courants, ou la somme des deux travaux précédents, est donc $-Wd(ii')$.

278. Les mêmes considérations peuvent être appliquées à l'action qu'un courant variable dans un conducteur fixe exerce sur lui-même; il suffit de supposer que les deux courants, dont nous avons calculé l'action mutuelle, deviennent égaux et coïncident. Le travail des forces E, provenant de l'action du courant C' sur le courant C, est $-Widi$; mais il faut remarquer que, dans l'intégrale W, chaque couple d'éléments a et b est comptée deux fois : une première fois, quand on regarde a comme appartenant au premier conducteur, b au second; une deuxième fois, quand on regarde b comme appartenant au premier conducteur, a au second. Si l'on pose

$$(5) \qquad w = \frac{k}{2} \sum \frac{\cos\theta \cos\theta'}{r} ds\, ds',$$

en ayant soin de ne prendre qu'une fois chaque couple d'éléments, on aura $W = 2w$, et le travail que le courant exerce sur lui-même aura pour expression $-2widi$ ou $-d(i^2w)$.

La quantité i^2w est ce que nous appellerons l'*énergie potentielle du courant:* c'est la quantité de travail que développe le courant, quand, abandonné à lui-même, son intensité diminue jusqu'à zéro. Inversement, pour produire un courant donné, il faut dépenser une quantité de travail ou d'action chimique égale à l'énergie potentielle du courant.

Il résulte de la nature des choses que le potentiel w d'un courant sur lui-même est une quantité positive. C'est ce qu'on vérifie immédiatement lorsque le condenseur est circulaire; car, dans ce cas, pour chaque couple d'éléments, les deux angles θ et θ' sont égaux.

De même l'énergie potentielle du système de deux courants est $i^2w + i'^2w' + ii'W$.

INDUCTION D'UN COURANT SUR LUI-MÊME PAR LE CHANGEMENT D'INTENSITÉ.

279. Supposons que dans un conducteur fermé immobile soit interposée une pile variable. L'énergie fournie par la pile pendant le temps dt est $naEqidt$ (n° 236), ou plus simplement $Hidt$, si l'on représente par H la quantité $naEq$; le travail des forces intérieures est $-d(i^2w)$; le travail des forces extérieures qui maintiennent le conducteur immobile est nul. Le théorème des forces vives donne l'équation

$$dA + \lambda i^2 dt = Hidt - d(i^2w), \tag{6}$$

dans laquelle le premier terme représente l'accroissement de la force vive des masses électriques, le second l'énergie calorifique communiquée aux molécules pondérables, de sorte que le premier membre est l'accroissement de la force vive de tout le système. Si nous négligeons, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, la force vive des masses électriques, l'équation devient

$$Hidt = \lambda i^2 dt + d(i^2w); \tag{7}$$

elle signifie que l'action chimique de la pile est égale à l'énergie calorifique dégagée sur le conducteur, plus l'accroissement d'énergie potentielle du courant.

Si l'on intègre depuis le moment où le courant commence jusqu'à celui où il finit, on a

$$\int Hidt = \int \lambda i^2 dt;$$

l'action chimique de la pile est égale à l'énergie calorifique dégagée sur le conducteur.

280. De l'équation (7) on déduit

$$i = \frac{H}{\lambda} - \frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt}. \tag{8}$$

Lorsque la pile est constante, l'intensité du courant est

$$i_1 = \frac{H}{\lambda}.$$

On reconnaît sur l'équation (8) que, si H augmente, i augmente aussi, tout en restant inférieure à i_1, et que si H diminue, i diminue aussi, tout en restant supérieure à i_1.

Posons, pour abréger, $\frac{2w}{\lambda} = a$; l'équation (8) devient

$$i = i_1 - a\frac{di}{dt},$$

et l'intégrale, développée en série, est

$$(9) \qquad i = i_1 - a\frac{di_1}{dt} + a^2\frac{d^2 i_1}{dt^2} - \ldots.$$

INDUCTION ENTRE DEUX COURANTS PAR LE CHANGEMENT D'INTENSITÉ.

281. Considérons maintenant deux conducteurs fermés C et C′ immobiles, dans lesquels soient interposées des piles variables H et H′. Appelons w et w' les potentiels des conducteurs sur eux-mêmes, et W le potentiel relatif à leur action mutuelle. Le travail des forces extérieures qui maintiennent immobiles les conducteurs est nul. Le travail des forces électriques qui s'exercent sur le premier courant est

$$-d(i^2 w) - W i\, di';$$

celui des forces qui s'exercent sur le second courant est

$$-d(i'^2 w') - W i'\, di.$$

Le théorème des forces vives donne les deux équations

$$\begin{aligned} dA + \lambda i^2\, dt &= H i\, dt - d(i^2 w) - W i\, di', \\ dA' + \lambda' i'^2 dt &= H' i' dt - d(i'^2 w') - W i'\, di, \end{aligned}$$

ou, en négligeant les forces vives des masses électriques,

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} H i\, dt &= \lambda i^2\, dt + d(i^2 w) + W i\, di', \\ H' i' dt &= \lambda' i'^2 dt + d(i'^2 w) + W i' di. \end{aligned} \right.$$

En ajoutant ces deux équations membre à membre, on obtient l'équation

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{H}\,i\,dt + \mathrm{H}'\,i'\,dt \\ &= \lambda i^2 dt + \lambda' i'^2 dt + d\,(i^2 w + i'^2 w' + i i' \mathrm{W}), \end{aligned}\right.$$

que l'on pouvait écrire *à priori;* elle signifie que la somme des actions chimiques des piles est égale à l'énergie calorifique dégagée sur les conducteurs, plus l'accroissement de l'énergie potentielle du système. Si l'on intègre depuis le moment où les courants commencent jusqu'à celui où ils finissent, on reconnaît que l'action chimique des piles est égale à l'énergie calorifique dégagée sur les conducteurs.

282. Des équations (10) on déduit

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} i &= i_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt} - \frac{\mathrm{W}}{\lambda}\frac{di'}{dt}, \\ i' &= i'_1 - \frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'}{dt} - \frac{\mathrm{W}}{\lambda'}\frac{di}{dt}, \end{aligned}\right.$$

i_1 et i'_1 représentant $\frac{\mathrm{H}}{\lambda}$ et $\frac{\mathrm{H}'}{\lambda'}$.

Quand les piles sont constantes, les intensités des courants sont constantes et égales à i_1 et à i'_1. Lorsque les piles sont variables, les intensités i et i' diffèrent de i_1 et i'_1 ; mais l'effet de l'induction est complexe. En intégrant par séries, on a

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} i &= i_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di_1}{dt} - \frac{\mathrm{W}}{\lambda}\frac{di'_1}{dt} + \ldots, \\ i' &= i'_1 - \frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'_1}{dt} - \frac{\mathrm{W}}{\lambda'}\frac{di_1}{dt} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Afin de mieux saisir la loi du phénomène, bornons-nous au cas où il n'y a pas de pile interposée dans le second conducteur; les équations (12) se réduisent à

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} i &= i_1 - \frac{2w}{\lambda}\frac{di}{dt} - \frac{\mathrm{W}}{\lambda}\frac{di'}{dt}, \\ i' &= -\frac{2w'}{\lambda'}\frac{di'}{dt} - \frac{\mathrm{W}}{\lambda'}\frac{di}{dt}, \end{aligned}\right.$$

et leurs intégrales à

$$(15)\quad \begin{cases} i' = -\dfrac{W}{\lambda'}\dfrac{di_1}{dt} + \ldots, \\ i = i_1 - \dfrac{2w}{\lambda}\dfrac{di_1}{dt} + \ldots. \end{cases}$$

Pour évaluer W, on a pris dans le conducteur C le sens même du courant i; supposons qu'on ait pris dans C′ un sens tel que W ait une valeur positive. Les équations précédentes montrent qu'une diminution d'intensité dans le courant i fait naître dans le conducteur C′ un courant de même sens que celui qui rend W positif, et qu'une augmentation fait naître un courant de sens contraire. Dès que le courant inducteur i devient constant, i' devient nulle et le courant induit cesse d'exister.

ACTION MUTUELLE DE DEUX COURANTS DANS DES CONDUCTEURS MOBILES.

283. Nous avons cherché l'action mutuelle de deux courants d'intensités variables dans des conducteurs fixes; nous allons maintenant traiter le cas général, et supposer les conducteurs mobiles. Le mouvement de la masse électrique $+m$ dans le conducteur C est défini par l'équation $s = f(t)$ (n° 272); de même le mouvement de la masse électrique $+m'$ est défini par l'équation $s' = f_1(t)$, et l'on a

$$u = \frac{ds}{dt}, \quad u' = \frac{ds'}{dt}.$$

Lorsque les conducteurs sont fixes, la distance r de deux points M et M′ de ces conducteurs est une fonction des deux variables indépendantes s et s'; si les conducteurs sont mobiles, cette distance est en outre une fonction du temps, et l'on a $r = \varphi(s, s', t)$. Cette fonction des trois variables indépendantes s, s', t est telle que, si l'on attribue à t une valeur constante, la fonction $\varphi(s, s', t)$ des deux variables indépendantes s et s' représente à cet instant la distance de deux points quelconques M et M′ des conducteurs. La même fonction

$r = \varphi(s, s', t)$ représentera aussi la distance des deux masses électriques $+m$ et $+m'$, se mouvant sur ces conducteurs mobiles, si l'on y regarde s et s' comme des fonctions du temps

$$s = f(t), \quad s' = f_1(t).$$

On aura de même

$$\sqrt{r} = \sqrt{\varphi(s, s', t)} = \psi(s, s', t).$$

C'est à ce point de vue qu'il faut se placer pour appliquer la formule de Weber.

284. En différentiant une première fois, on a

$$\frac{d\sqrt{r}}{dt} = \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t},$$

ou

$$(16) \qquad \frac{d\sqrt{r}}{dt} = u\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s} + u'\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}.$$

Chacune des dérivées partielles $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}$, $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}$, $\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}$ de la fonction $\sqrt{r} = \psi(s, s', t)$ doit aussi être considérée comme une fonction des trois quantités s, s', t. On aura donc, en différentiant une seconde fois,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = {} & u\left(\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial t}\right)\\ & + u'\left(\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\,\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\,\partial t}\right)\\ & + \left(\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'}\frac{ds'}{dt} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t^2}\right)\\ & + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{du'}{dt},\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = {} & \left(u^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2} + 2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'} + u'^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\right)\\ & + \left(2u\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s} + 2u'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\,\partial s'} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t^2}\right)\\ & + \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{du'}{dt}\right).\end{aligned}$$

Lorsque la section est inégale et l'intensité variable, u est une fonction de s et t, comme nous l'avons expliqué précédemment (n° 273), et l'on a

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt}+\frac{\partial u}{\partial t}=u\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{du'}{dt}=u'\frac{\partial u'}{\partial s'}+\frac{\partial u'}{\partial t}.$$

On a ainsi

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}=&\left(u^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s^2}+2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}+u'^2\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'^2}\right)\\&+\left(2u\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s}+2u'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s'}+\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t^2}\right)\\&+\left(u\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}+u'\frac{\partial u'}{\partial s'}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right)\\&+\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial u'}{\partial t}\right).\end{aligned}\right.$$

Quand on considère les actions réunies de $+m$ et de $-m$ sur $+m'$, comme il faut changer le signe de m et celui de u, les seuls termes de $\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}$ qui subsistent dans le résultat sont les trois termes

$$2uu'\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}+\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}+2u\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s},$$

qui changent de signe avec u; tous les autres se détruisent. On trouve ainsi que l'action des deux masses $+m$ et $-m$, qui sont contenues dans l'élément ds, sur $+m'$ est

$$\begin{aligned}\frac{F}{2}+E+E'=&-\frac{4kmm'uu'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}-\frac{2kmm'}{\sqrt{r}}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}\\&-\frac{4kmm'u}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s}.\end{aligned}$$

L'action des deux mêmes masses $+m$ et $-m$ sur $-m'$ sera

$$\begin{aligned}\frac{F}{2}-E-E'=&-\frac{4kmm'uu'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}+\frac{2kmm'}{\sqrt{r}}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}\\&+\frac{4kmm'u}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s}.\end{aligned}$$

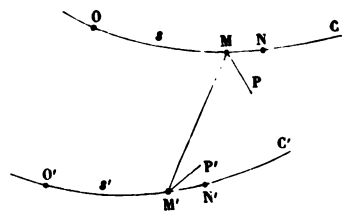
On retrouve ainsi les deux forces $\frac{F}{2}$ et $\pm E$ obtenues précédemment (n° 275), et la mobilité des conducteurs introduit une troisième force

$$\text{(III)} \qquad E' = \frac{-2km'i\,ds}{\sqrt{r}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial t \partial s}.$$

La somme des actions exercées par l'élément ds sur les deux masses $+m'$ et $-m'$ contenues dans l'élément ds' est toujours égale à F; c'est la force électrodynamique dont l'expression reste la même. Nous avons maintenant deux forces électromotrices : l'une $\pm E$ due à la variation de l'intensité; l'autre $\pm E'$ due au déplacement des conducteurs.

285. Évaluons le travail des forces dans les conditions actuelles. Appelons v et v' les vitesses des points M et M' des conducteurs, ψ l'angle de la vitesse v avec la direction MM', ψ' l'angle de la vitesse v' avec la direction M'M (*fig.* 83).

Fig. 83.



La masse électrique $+m$ a un double mouvement; elle se meut sur le conducteur C avec la vitesse u, et participe au mouvement du conducteur qui l'entraîne avec lui; son déplacement pendant le temps dt est la résultante des deux déplacements $MN = udt$, $MP = vdt$. Le déplacement de la masse $-m$ est la résultante des deux déplacements $-udt$, vdt. Les masses électriques $+m'$ et $-m'$ ont de même un double mouvement : leur mouvement propre sur le conducteur C', et le mouvement du conducteur qui les entraîne avec lui; le déplacement de la masse $+m'$ dans l'espace pendant le temps dt est la résultante des deux déplacements $M'N' = u'dt$ et

$M'P' = v'dt$; le déplacement de la masse $-m'$ est la résultante des deux déplacements $-\mu'dt$ et $v'dt$.

Or on sait que le travail d'une force pour un déplacement résultant est égal à la somme des travaux relatifs aux déplacements composants. Nous avons vu (n° 274) que la résultante des forces $\frac{F}{2}$, qui agissent sur la masse $+m'$, et qui proviennent des différents éléments du conducteur fermé C, est normale au conducteur C', et que, par conséquent, le travail de cette résultante pour le déplacement $u'dt$ est nul; le travail pour le déplacement $v'dt$ est égal à

$$-2km'u'iv'dt\int\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}\frac{\cos\psi'}{\sqrt{r}}ds.$$

La résultante des forces $\frac{F}{2}$ qui agissent sur la masse $-m'$, étant égale en grandeur et en direction, donne aussi un travail nul pour le déplacement $-u'dt$, et le même travail pour le déplacement $v'dt$. De sorte que le travail des forces $\frac{F}{2}$ qui agissent sur les deux masses $+m'$ et $-m'$, contenues dans l'élément ds', est

$$-2kii'v'dt\,ds'\int\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}\frac{\cos\psi'}{\sqrt{r}}ds;$$

le travail des forces $\frac{F}{2}$, qui agissent sur toutes les masses électriques contenues dans le conducteur C', est donc

$$(18)\qquad d\mathfrak{T}FC' = -2kii'dt\int\int\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}\frac{v'\cos\psi'}{\sqrt{r}}ds\,ds'.$$

Le travail des mêmes forces qui agissent sur toutes les masses électriques contenues dans le conducteur C est

$$(19)\qquad d\mathfrak{T}FC = -2hii'dt\int\int\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}\frac{v\cos\psi}{\sqrt{r}}ds\,ds'.$$

Il est évident que la somme de ces deux travaux est le travail des forces électrodynamiques dans le système des deux conducteurs, travail dont nous avons trouvé la valeur

$ii'dW$ au n° 267. C'est ce qu'il est d'ailleurs facile de vérifier; on a, en effet,

$$v\cos\psi + v'\cos\psi' = -\frac{\partial r}{\partial t},$$

et la somme des deux travaux précédents est identique à l'expression (33) du n° 266.

Les forces $+E$ et $-E$ qui agissent sur les masses $+m'$ et $-m'$ donnent, pour le déplacement $v'dt$, des travaux égaux et de signes contraires; on peut donc, dans l'évaluation du travail de ces forces, faire abstraction du mouvement des conducteurs, et on est ramené au cas que nous avons traité au n° 277. Ainsi le travail, pendant le temps dt, des forces $\pm E$ est $-Wi'di$ sur le courant C', $-Widi'$ sur le courant C; en tout $-Wd(ii')$.

286. Les forces $+E'$ et $-E'$ qui agissent sur les masses $+m'$ et $-m'$ donnent de même, pour le déplacement $v'dt$, des travaux égaux et de signes contraires, et l'on peut encore faire abstraction du déplacement du conducteur C'. Le travail de la force E', qui agit sur la masse $+m'$, pour le déplacement $u'dt$, est

$$E'\cos\theta' \times u'dt = \frac{2km'u'idtds}{\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s}$$

$$= 4km'u'idtds\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s}.$$

Le travail de leur résultante est

$$4km'u'idt\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s}ds.$$

La résultante des forces $-E'$, qui agissent sur $-m'$, donne un travail égal et de même signe; de sorte que le travail des forces $+E'$ et $-E'$, qui agissent sur les deux masses $+m'$ et $-m'$ contenues dans l'élément ds', est

$$4kii'dtds'\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s}ds.$$

Le travail des forces $\pm E'$, qui agissent sur toute l'étendue de

courant C′, est donc

$$4kii'dt\int\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s}\,ds\,ds'.$$

En intégrant par parties, on a

$$\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t\partial s}\,ds=-\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}\,ds,$$

puisque les conducteurs sont fermés, et l'expression précédente devient

$$(20)\qquad -4kii'dt\int\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\,\partial s'}\,ds\,ds';$$

si l'on compare cette expression à l'expression (33) du n° 266, on voit que le travail des forces $\pm$ E′, qui agissent sur le courant C′, est égal au travail des forces électrodynamiques et de signe contraire; sa valeur est donc $-ii'd\mathrm{W}$. Le travail des forces $\pm$ E′ qui agissent sur le courant C a la même valeur $-ii'd\mathrm{W}$.

Ainsi, le travail pendant le temps dt des forces que le courant C′ exerce sur le courant C est

$$(21)\qquad d\mathfrak{T}\mathrm{FC}-\mathrm{W}i\,di'-ii'd\mathrm{W}=d\mathfrak{T}\mathrm{FC}-id(i'\mathrm{W}),$$

celui des forces que le courant C exerce sur C′ est

$$(22)\qquad d\mathfrak{T}\mathrm{FC}'-\mathrm{W}i'di-ii'd\mathrm{W}=d\mathfrak{T}\mathrm{FC}'-i'd(i\mathrm{W}).$$

La somme de ces deux travaux, c'est-à-dire le travail de l'action mutuelle des deux courants, est

$$(23)\qquad ii'd\mathrm{W}-id(i'\mathrm{W})-i'd(i\mathrm{W})=-d(ii'\mathrm{W}).$$

INDUCTION D'UN COURANT SUR LUI-MÊME PAR LE CHANGEMENT DE FORME DU CONDUCTEUR.

287. Les considérations précédentes peuvent être appliquées à l'action d'un courant sur lui-même, quand le conducteur change de forme, comme un fil flexible, tout en conservant une longueur constante, ou quand il est composé de plusieurs parties solides et mobiles les unes par rapport aux autres. Supposons, comme au n° 278, que les deux courants devien-

nent égaux et coïncident, et remarquons que le travail de chaque couple d'éléments est compté deux fois; en remplaçant W par $2w$ et divisant par 2, nous aurons, pour le travail des forces électrodynamiques, i^2dw, et, pour le travail de toutes les forces que le courant exerce sur lui-même, $-d(i^2w)$. Nous conserverons toujours à la quantité i^2w le nom d'*énergie potentielle du courant.*

Les forces électrodynamiques doivent être regardées comme appliquées au conducteur; à ce conducteur sont appliquées aussi des forces extérieures. Le mouvement sensible du conducteur étant déterminé par les forces électrodynamiques et les forces extérieures, on a

$$(24) \qquad dB = i^2dw + d\mathfrak{T}\,\text{ext.},$$

B désignant la force vive sensible du conducteur. D'autre part, si l'on considère l'ensemble du courant et du conducteur, on a

$$dB + dA + \lambda i^2dt = Hi\,dt - d(i^2w) + d\mathfrak{T}\,\text{ext.},$$

ou, en vertu de l'équation précédente,

$$dA + \lambda i^2dt = Hi\,dt - d(i^2w) - i^2dw,$$

et, en négligeant la force vive A des masses électriques,

$$(25) \qquad Hi\,dt = \lambda i^2dt + d(i^2w) + i^2dw.$$

288. De l'équation (24) on déduit

$$i^2dw = dB - d\mathfrak{T}\,\text{ext.}$$

Cette équation indique que le travail i^2dw des forces électrodynamiques est égal au travail extérieur accompli ou reçu par l'appareil, plus la variation de la force vive sensible du conducteur. Afin de simplifier les énoncés, nous comprendrons dans le travail extérieur cette variation de la force vive sensible, en la regardant comme un travail accompli ou reçu, suivant qu'elle est positive ou négative, et nous dirons, d'une manière générale, que le travail des forces électrodynamiques est égal au travail extérieur accompli ou reçu par l'appareil.

D'après cela, l'équation (25) signifie que l'action chimique de la pile est égale à l'énergie calorifique dégagée sur le conducteur, plus l'accroissement d'énergie potentielle du courant, plus encore le travail extérieur accompli ou reçu.

On en déduit

$$(26) \qquad i = i_1 - \frac{2}{\lambda}\frac{d(iw)}{dt}.$$

On voit par là qu'une augmentation du potentiel w diminue l'intensité du courant, et que, au contraire, une diminution du potentiel augmente l'intensité du courant. En développant en série, on a

$$(27) \qquad i = i_1 - \frac{2}{\lambda}\frac{d(i_1 w)}{dt} + \frac{4}{\lambda^2}\frac{d\left[w\frac{d(i_1 w)}{dt}\right]}{dt} - \ldots.$$

INDUCTION ENTRE DEUX COURANTS PAR LE MOUVEMENT DES CONDUCTEURS.

289. Pour préciser, nous supposerons que les deux conducteurs sont des corps de forme invariable, analogues à des corps solides, qui se déplacent l'un par rapport à l'autre. De ce mouvement relatif résultent, comme nous l'avons vu, des forces électromotrices $\pm E'$, qui modifient les intensités des courants produits par les piles H et H' interposées dans les conducteurs. Les forces électrodynamiques que les courants exercent l'un sur l'autre doivent toujours être regardées comme appliquées aux conducteurs; à ces conducteurs sont appliquées aussi des forces extérieures. Le mouvement sensible des corps solides C et C' étant déterminé par les forces électrodynamiques et les forces extérieures qui lui sont appliquées, on a

$$dB = d\mathfrak{T}FC + d\mathfrak{T}\,\text{ext.}C,$$

$$dB' = d\mathfrak{T}FC' + d\mathfrak{T}\,\text{ext.}C',$$

et, par suite,

$$dB + dB' = ii'dW + d\mathfrak{T}\,\text{ext.},$$

le dernier terme désignant le travail des forces extérieures

qui agissent sur les deux conducteurs. On en déduit

$$ii'dW = dB + dB' - d\mathfrak{E}\,\text{ext.};$$

en comprenant dans le travail extérieur la variation de la force vive sensible, comme nous l'avons fait précédemment, nous dirons encore que le travail $ii'dW$ des forces électrodynamiques est égal au travail extérieur accompli ou reçu par l'appareil.

Considérons maintenant le conducteur C et le courant i qui le parcourt; le théorème des forces vives, appliqué à l'ensemble, donne l'équation

$$\begin{aligned} &dB + dA + \lambda i^2 dt \\ &\quad = Hi\,dt - d(i^2 w) + d\mathfrak{E}FC - i\,d(i'W) + d\mathfrak{E}\,\text{ext.C}. \end{aligned}$$

Le premier membre est la variation de la force vive totale, le second membre contient l'action chimique de la première pile, le travail du premier courant sur lui-même (n° 287), le travail du second sur le premier (n° 286), et enfin le travail des forces extérieures qui agissent sur le premier conducteur. En vertu de l'une des équations précédentes, cette équation se réduit à

$$dA + \lambda i^2 dt = Hi\,dt - d(i^2 w) - i\,d(i'W),$$

et, en négligeant la force vive des masses électriques, à

$$(28) \qquad Hi\,dt = \lambda i^2 dt + d(i^2 w) + i\,d(i'W).$$

On a de même, pour le second courant,

$$(29) \qquad H'i'\,dt = \lambda' i'^2 dt + d(i'^2 w') + i'\,d(iW).$$

En ajoutant ces deux équations membre à membre, on obtient l'équation

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} &Hi\,dt + H'i'\,dt \\ &\quad = \lambda i^2 dt + \lambda' i'^2 dt + d(i^2 w + i'^2 w' + ii'W) + ii'\,dW. \end{aligned} \right.$$

Cette équation signifie que la somme des actions chimiques fournies par les piles est égale à l'énergie calorifique dégagée sur les conducteurs, plus l'accroissement de l'énergie potentielle du système, plus encore le travail extérieur accompli ou reçu.

290. Les potentiels w et w' des deux conducteurs solides étant constants, des deux équations (28) et (29) on déduit

$$(31)\quad \begin{cases} i = i_1 - \dfrac{2w}{\lambda}\dfrac{di}{dt} - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d(i'W)}{dt}, \\ i' = i'_1 - \dfrac{2w'}{\lambda'}\dfrac{di'}{dt} - \dfrac{1}{\lambda'}\dfrac{d(iW)}{dt}. \end{cases}$$

i_1 et i'_1 représentant toujours $\frac{H}{\lambda}$ et $\frac{H'}{\lambda'}$. Afin de mettre en évidence ce second mode d'induction, nous supposerons les piles constantes. Quand il n'y a pas mouvement relatif, W étant constant, les intensités prennent les valeurs constantes i_1 et i'_1. La même chose a lieu, lorsque l'appareil passe par une position pour laquelle le potentiel W est maximum ou minimum; car, la dérivée $\frac{dW}{dt}$ devenant nulle, les équations (31) sont vérifiées par $i = i_1$, $i' = i'_1$, $\frac{di}{dt} = 0$, $\frac{di'}{dt} = 0$.

Les intégrales des équations (31), développées en séries, sont

$$(32)\quad \begin{cases} i = i_1 - \dfrac{i'_1}{\lambda}\dfrac{dW}{dt} + \cdots, \\ i' = i'_1 - \dfrac{i_1}{\lambda'}\dfrac{dW}{dt} + \cdots \end{cases}$$

L'induction des courants l'un sur l'autre diminue ou augmente les intensités des courants, suivant que le potentiel W augmente ou diminue. L'effet est d'autant plus marqué que $\frac{dW}{dt}$ est plus grand en valeur absolue, c'est-à-dire que le mouvement est plus rapide.

291. Dans le cas particulier où il n'y a pas de pile interposée dans le second conducteur, les équations (31) se réduisent à

$$(33)\quad \begin{cases} i = i_1 - \dfrac{2w}{\lambda}\dfrac{di}{dt} - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{d(i'W)}{dt}, \\ i' = -\dfrac{2w'}{\lambda'}\dfrac{di'}{dt} - \dfrac{1}{\lambda'}\dfrac{d(iW)}{dt}, \end{cases}$$

et leurs intégrales à

$$(34)\quad \begin{cases} i' = -\dfrac{i_1}{\lambda'}\dfrac{dW}{dt} + \cdots, \\ i = i_1 + \dfrac{i_1}{2\lambda\lambda'}\dfrac{d^2W^2}{dt^2} + \cdots. \end{cases}$$

Supposons, comme au n° 282, que l'on ait déterminé le potentiel W en prenant dans le conducteur C le sens du courant i, et dans le conducteur C′ un sens tel que le potentiel ait une valeur positive. On voit qu'une diminution du potentiel W fait naître dans le conducteur C′ un courant de même sens, et qu'une augmentation fait naître un courant de sens contraire. Une augmentation ou une diminution du potentiel produit donc le même effet qu'une augmentation ou une diminution dans l'intensité du courant inducteur (n° 281). Ces lois ont été vérifiées par l'expérience.

MACHINES ÉLECTROMOTRICES ET MACHINES INVERSES.

292. L'appareil que nous venons d'étudier, et qui est formé de deux conducteurs mobiles, dans lesquels circulent des courants i et i', peut servir de machine motrice. Supposons que le mouvement des conducteurs soit périodique, comme cela a lieu dans la plupart des machines. La force vive sensible des conducteurs reprenant la même valeur, le travail des forces électrodynamiques, pendant chaque période, est égal à celui des forces extérieures et de signe contraire. Pour évaluer le potentiel W, nous imaginons deux courants d'intensité 1, parcourant, l'un le conducteur C dans le sens même du courant i, l'autre le conducteur C′ dans un sens choisi à volonté; il est évident que, pendant une période, le potentiel W passe par un minimum W_1 et par un maximum W_2. Pour que la machine fonctionne utilement, il est nécessaire de changer alternativement le signe de l'un des courants, par exemple du courant i'. Quand la machine va de la position du minimum à celle du maximum, dW ayant une valeur positive, on fait marcher le courant i dans le conducteur C′ dans le sens choisi pour l'évaluation de W; de cette manière, i' devant être re-

gardée comme positive, le travail $ii'dW$ des forces électrodynamiques est positif. Mais, quand la machine va de la position du maximum à celle du minimum, dW ayant une valeur négative, on fait marcher le courant dans le conducteur C′ en sens inverse de la direction précédente ; i' devant alors être regardée comme négative, le travail $ii'dW$ des forces électrodynamiques est encore positif. On rétablit le sens primitif du courant dans le conducteur C′, et ainsi de suite.

Il est évident que le changement de sens d'un courant s'opère d'une manière continue, quoique dans un temps très-court, et par conséquent que son intensité i' devient nulle à chaque changement. Si l'on intègre l'équation (30) pour une des phases du mouvement, on aura

$$(35)\qquad \int (Hi + H'i')dt = \int (\lambda i^2 + \lambda' i'^2)dt + \int ii'dW.$$

Ainsi l'action chimique des piles, pendant chaque phase, est égale à l'énergie calorifique dégagée sur les conducteurs, plus le travail extérieur accompli.

293. Une pile suffit pour faire fonctionner la machine. On peut, en effet, disposer l'appareil de manière que le même courant parcoure les deux conducteurs C et C′, et que le sens du courant soit changé alternativement dans le conducteur C′. Pendant la première phase du mouvement, on aura $i' = i$, et pendant la seconde, $i' = -i$. L'équation (30) donne, pour la première phase,

$$(36)\qquad i = i_1 - \frac{2(w + w')}{\lambda + \lambda'}\frac{di}{dt} - \frac{2}{\lambda + \lambda'}\frac{d(iW)}{dt},$$

et, pour la seconde,

$$(37)\qquad i = i_1 - \frac{2(w + w')}{\lambda + \lambda'}\frac{di}{dt} + \frac{2}{\lambda + \lambda'}\frac{d(iW)}{dt};$$

si l'on développe en série, en supposant la pile constante, on a la formule approchée

$$(38)\qquad i = i_1 \mp \frac{2i_1}{\lambda + \lambda'}\frac{dW}{dt},$$

le signe supérieur se rapportant à la première phase, le signe inférieur à la seconde; mais, comme $\frac{dW}{dt}$ est positif dans le

premier cas, négatif dans le second, l'intensité i, variable pendant le jeu de la machine, est constamment moindre que l'intensité constante i_1 que produirait la pile si la machine était en repos. et elle est d'autant plus petite que la valeur absolue de $\frac{dW}{dt}$ est plus grande, c'est là dire que la machine marche plus vite.

L'équation (35), appliquée aux deux phases d'une période, donne

$$\int i i' dW = \int_0^T i\,[H - (\lambda + \lambda')\,i]\,dt;$$

telle est la quantité d'action chimique transformée en travail, pendant la durée T d'une période. En désignant par i_m une valeur moyenne de i, cette quantité peut être mise sous la forme

$$(\lambda + \lambda')\,i_m(i_1 - i_m)\,T.$$

Le travail pendant l'unité de temps est

$$(\lambda + \lambda')\,i_m(i_1 - i_m);$$

il est maximum lorsque le jeu de la machine est réglé de telle sorte que $i_m = \frac{i_1}{2}$.

Le coefficient économique de la machine, ou le rapport de la quantité d'action chimique transformée en travail à la quantité totale dépensée par la pile, est

$$\frac{\int [H i - (\lambda + \lambda')\,i^2]\,dt}{\int H i\,dt} = 1 - \frac{\int (\lambda + \lambda')\,i^2 dt}{\int H i\,dt} = 1 - \frac{i_{m'}}{i_1},$$

$i_{m'}$ étant aussi une valeur moyenne de i. On peut rendre ce coefficient économique aussi voisin de l'unité que l'on veut, et par conséquent la machine parfaite au point de vue théorique. Il suffit pour cela que l'intensité i soit très-petite, ce qui a lieu quand la machine marche très-vite; mais alors la quantité de travail produite dans l'unité de temps est très-petite, ce qui rend l'avantage illusoire.

294. Pour réaliser une machine inverse avec deux conducteurs C et C′ fermés, et séparés l'un de l'autre, il suffit d'une pile H interposée dans le conducteur C; le mouvement périodique des conducteurs, mouvement produit par des forces extérieures, donne naissance à un courant marchant dans le conducteur C′, alternativement dans un sens et dans l'autre. En effet, d'après la première des équations (34), on a approximativement

$$i' = -\frac{i_1}{\lambda'}\frac{dW}{dt}.$$

Quand l'appareil va de la position où le potentiel est maximum à celle où il est minimum, i' ayant une valeur positive, le courant induit marche dans le sens qui a été choisi pour évaluer W; mais quand l'appareil va de la position du minimum à celle du maximum, le courant i' change de signe et marche en sens contraire. De cette manière, et par le jeu naturel de la machine, le travail des forces électrodynamiques $ii'dW$ est toujours négatif. Dans chacune des phases du mouvement, la machine reçoit un travail extérieur qui est transformé en chaleur ou en lumière.

295. On obtient aussi une machine motrice en faisant réagir sur un courant produit par une pile un aimant naturel ou un électro-aimant. Nous avons vu (n° 270) que le travail des forces électrodynamiques qui s'exercent entre un courant fermé i et un aimant a pour expression idW, W étant un certain potentiel qui dépend de la position relative du courant et de l'aimant. Le mouvement étant périodique, le potentiel passe par un minimum W_1 et un maximum W_2. Afin d'avoir toujours un travail positif, on changera alternativement le sens du courant.

La machine inverse n'exige pas de pile; le mouvement relatif de l'aimant et du conducteur fait naître dans celui-ci un courant induit, qui change de sens alternativement, de manière à ce que le travail des forces électrodynamiques idW soit toujours négatif.

Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, rue de Seine-Saint-Germain, 10.